Schwarz 微分を巡って

佐々木 武　　吉田正章

1. 次の問から始めることにしよう：

定数ではない, x の正則関数 $z = z(x)$ に対して $\{z; x\}$ を次で定義する.

$$\{z; x\} = \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

ここで, $' = d/dx$ である. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の定数 $a \neq 0$, b に対して $\{az; x\} = \{z; x\}$, $\{z + b; x\} = \{z; x\}$ を示せ. また $\{1/z; x\} = \{z; x\}$ を示せ.

(2) $ad - bc \neq 0$ なる任意の定数 a, b, c, d に対して次をを示せ.

$$\left\{\frac{az + b}{cz + d}; x\right\} = \{z; x\}.$$

(3) $z(x) = (ax + b)/(cx + d)$ (a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ なる定数）に対して $\{z; x\} = 0$ となることを, $\{x; x\} = 0$ と (2) を用いて示せ.

(4) $\{z; x\} = 0$ ならば, $z(x) = (ax + b)/(cx + d)$ (a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ なる定数) であることを示せ.

この問は某大学院の入試問題であるが, ここに定義されている $\{z; x\}$ が この小論で解説したい Schwarz 微分である. 以後, z の 変数 x に関する Schwarz 微分と云う. Schwarz とは数学者 Hermann Amadeus Schwarz (1843–1921) のことであり, 学部で習う数学のここかしこに出てくる. 例えば Schwarz の不等式, 関数論の最初に習う Schwarz の補題, ついで, Schwarz の鏡像原理など, 馴染みの多い読者もあることと思う. 独逸語で schwarz は黒であるからと言って, それらを黒微分, 黒不等式等と呼ぶ人がいるが, よい趣味とは言えないだろう. 漫画の世界ではブラックジャック＝黒男であろうが. 上記の Schwarz 微分の定義は, 関数論の教科書には何故か必ず何処かに（時には章末の演習問題に貶められて）書いてあり, 至極簡単とも訳が分からない式とも思えるが, 筆者の一人がこれを最初に目にしたのは, 学部 4 年のセミナーで

R. C. Gunning, Lectures on Riemann Surfaces, Princeton Math. Notes, Princeton Univ. Press 1966

を読んだときである. 大変ややこしい式と感じたのが, 第一感. 次に感じたことは, 上記の (4) が解ける, という驚きといえるだろう. 微分方程式ましてや非線形のそれは, 一般には解けないものと習ってきたので, 不思議という気持であった.

Gunning によれば, ２つの Schwarz 微分がある. ‘やさしい Schwarz 微分’ と ‘ふつうの Schwarz 微分’ とであり, 後者が上記の $\{z;x\}$ で定義され, 前者は

$$[z;x]=\frac{z''}{z'}$$

と定義される. ここで, アファイン変換

$$x\mapsto ax+b \qquad a,b\in\mathbf{C},\quad a\neq 0$$

のなす群を $\mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})$; 一次分数変換

$$x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d} \qquad a,b,c,d\in\mathbf{C},\quad ad-bc\neq 0$$

のなす群を $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ とかく. ここで $\mathbf{C}$ は複素数体を表すが, この記事の殆んどの部分 (この節はすべて) は実数体上で正しい. 最初の問は, 関係

$$\boxed{\{z;x\}=0 \qquad \leftrightarrow \qquad z(x)\in\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})}$$

を示しており, 同様に, 関係

$$\boxed{[z;x]=0 \qquad \leftrightarrow \qquad z(x)\in\mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})}$$

が示される. これらの Schwarz 微分は, もう一つ接続公式（合成関数の微分法のことである）とよばれる重要な性質を持っている. z を x の定数でない関数, x を y の定数でない関数とするとき以下が成立する.

$$\boxed{\begin{gathered}[z;y]=[z;x]\frac{dx}{dy}+[x;y]\\ \{z;y\}=\{z;x\}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\{x;y\}\end{gathered}}$$

2. Schwarz の論文

Schwarz 微分の起こりについて, 題名が長いので有名な Schwarz の論文

> Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrisce Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt, Journal für reine und angewandte Mathematik 75(1872), 292–335

で振り返ってみよう. 微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dz}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}z=0$$

を Gauss の超幾何微分方程式という. (α,β,γ) は複素数のパラメタである. 何故こんなものが突然出てくるのかはさて置いて, Schwarz はすべての解が代数関数であるようなパラメタの組と, そのときの解を具体的に求めることを考えた. 何故そんなことを考えたのかはさて置き, いま一般に 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2}+p\frac{dz}{dx}+qz=0$$

について, その 2 つの独立な解を z_1 と z_2 とすると, Wronski 行列式 $z_2dz_1/dx-z_1dz_2/dx$ は $\exp(-\int pdx)$ の定数倍に等しい. Gauss の微分方程式では $x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$ であるので, 独立な解が共に代数関数とすれば, γ, $\alpha+\beta$ は実数の有理数である必要がある. 次に彼が考えたのは, z_1 と z_2 が共に代数関数であれば, その比 z_2/z_1 もそうであるはずであり, もっと言えば, どんな定数 a, b, c, d についても比 $s=(az_1+bz_2)/(cz_1+dz_2)$ が代数関数でなければならないことである. 彼の発見は, この s と方程式の係数との関係

$$\{s;x\}=2q-\frac{1}{2}p^2-\frac{dp}{dx}$$

である. 右辺の $2q$ を除いた残りが Schwarz 微分の定義式に酷似しているのは何故か等と言うことは各自で考えてもらうとして, ここでは機械的計算だけでこれを示してみよう.

$z_2=sz_1$ のときに示せば十分. 関係 $z_2'=sz_1'+s'z_1$ と $z_2''=sz_1''+2s'z_1'+s''z_1$ を z_2 が解であるという関係式 $z_2''+pz_2'+qz_2=0$ に代入し, z_1 が解であるという関係式 $z_1''+pz_1'+qz_1=0$ を用いると, $2s'z_1'+(s''+ps')z_1=0$ となる, すなわち,

$$p+\frac{s''}{s'}=-2\frac{z_1'}{z_1}.$$

この両辺をもう一度微分し, 次のように変形する.

$$\begin{aligned} p' + \left(\frac{s''}{s'}\right)' &= -2\frac{z_1 z_1'' - (z_1')^2}{z_1^2} = -2\frac{z_1(-pz_1' - qz_1) - (z_1')^2}{z_1^2} \\ &= 2q + 2\left(p\frac{z_1'}{z_1} + \left(\frac{z_1'}{z_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

z_1'/z_1 はすでに p と s の微分で書かれているので, これを代入すると上記の関係式が得られることは容易にわかる. どうです「計算すればこうなる」というのは食えないものでしょう.

Gauss の超幾何微分方程式では

$$\{s; x\} = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-x)^2} + \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{2x(1-x)} \tag{1}$$

と, 非常に簡単な式が得られる. ここで,

$$\lambda = 1-\gamma, \quad \mu = \gamma - \alpha - \beta, \quad \nu = \alpha - \beta.$$

次に彼がしたことは, この $\{s; x\}$ の式から写像

$$x \mapsto s(x) = z_2(x)/z_1(x)$$

の局所的な振る舞いについての情報を得ることであった. 実際, $x = 0$ の近くで, $s = x^a u(x)$, $u(x)$ は $x = 0$ で正則かつ $u(0) \neq 0$, についての Schwarz 微分を計算すると

$$\{s; x\} = \frac{a^2-1}{4x^2} + \frac{1}{x}[x = 0 \text{ で正則な関数}]$$

となっていることが, 正直に計算してみるとわかる. 逆に, 上の式 (1) は Gauss の微分方程式の解についての $x = 0, 1, \infty$ での様子を述べていることになる. これらの情報から — 所謂 Schwarz 三角形の頂角が分かり, その三角形をパタンコパタンコと折り返して, ぐちゃぐちゃにならないで球面を覆うのは ⋯ と考えていって — 所要のパラメタの組みを求めることができた. 実際の推論は, 彼の論文にゆずることにするが, 肝心だったのは, 表示 (1) を得たことにあり, Schwarz 微分の名の由来となっている.

3. 幾何学的考察と一般化

さて, $p=0$ なる微分方程式では, $\{s;x\}=2q$ である. 別の言い方をすると, x の関数 q が先に与えられていて, s に関する方程式

$$\{s;x\}=2q(x)$$

の解を求めるには, 線形の微分方程式

$$z''+qz=0$$

の２つの独立な（かってな）解 z_1, z_2 を求めて, $s=z_2/z_1$ とすればよいことを示している. 関数 s を x の住む源 (みなもと) 空間から的 (まと) 空間なる射影直線 $\mathbf{P}^1$ (2 つの複素数の比の全体のこと, $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ と思ってもよい) への写像

$$x\mapsto s=[z_1,z_2]\in\mathbf{P}^1$$

と考えると, 量 $\{s;x\}$ が $\mathbf{P}^1$ の射影座標に依らない写像の不変量であることを示している. すなわち, ２つの関数 s_1 と s_2 があり, それらを射影直線への写像と考えるとき, それらが一次分数変換 (射影変換とも言う) で移り合うためには $\{s_1;x\}=\{s_2;x\}$ であることが必要十分, といえる.

この考察を一般化することを考えよう. 各自が自分の興味に応じた方向を考える訳である（最後の節を参照）が, 何と言っても一番安易なのは「高次元化」である, 「多変数化」とも言われる. 源空間を n 次元, 的空間を m 次元射影空間 $\mathbf{P}^m$(あるいはもうちょっと一般にして草男 (Grassmann) 多様体も考えるがここでは説明しない) として, 源空間から的空間への写像の射影変換に関する不変量が求まればそれを ‘高等’Schwarz 微分とでも呼んでその性質を調べようという訳である. これに関した研究は射影空間内の部分多様体に関する幾何学とか射影微分幾何学と呼ばれる. それはともかく, このくらいはっきり問題設定 (本来なら一番苦労するところ) が出来ているのに, 一般の n,m では全く結果がないのである. 今のところ

(1) $n=1, m\geq 2$ (射影曲線),

(2) $n=m$ (仮に射影接続と呼ぶ),

(3) $n=m-1$ (仮に等角接続と呼ぶ)

の場合にはほぼ満足ゆく結果がある (この他に $n=k^2$ で的空間が $(k,2k)$ 型草男多様体のときも研究がある.)

以下射影曲線と射影接続の解説をする.

4. 射影曲線の場合

1次元の源空間から一般次元の射影空間 $\mathbf{P}^n$ への写像の射影変換に関する不変量を考えるのである．幾何的には, 写像の像は曲線であるので, 2つの曲線が $\mathbf{P}^n$ の運動群である射影変換群 $\mathrm{PGL}(n+1)$ で重ね合わせることができる条件を求めること, 別の言い方をすると, $\mathbf{P}^n$ の運動によらない曲線の不変量を求めることといえる．

これと同様のことは群がちょっと違うだけで実は学部の必須科目で習っているのである．Euclid 空間内のふたつの曲線が運動群 (この場合は平行移動と回転のつくる群) で移り合うための条件は Frenet-Serret の方程式 (自然方程式とも言う) の係数に現れる曲線の曲率や捩率が一致すること, と言うのがそれである．

この基本的事実の射影版, 即ち運動群を射影変換群に変えただけのものが今の問題である．これは, Halphen や, Laguerre, Forsyth により解かれ, 現代的な取扱いは

> Y. Se-ashi, A geometric construction of Laguerre-Forsyth's canonical forms of linear ordinary differential equations, Advanced Studies in Pure Mathematics 22(1993), 265–297

に詳しいが, ここでは $n=2$ のときをまとめておこう．

射影平面 $\mathbf{P}^2$ への写像は同次座標をもちいれば $z(x)=[z_1(x),z_2(x),z_3(x)]$ とかかれる．これから未知関数 z についての微分方程式を

$$\begin{vmatrix} z''' & z'' & z' & z \\ z_1''' & z_1'' & z_1' & z_1 \\ z_2''' & z_2'' & z_2' & z_2 \\ z_3''' & z_3'' & z_3' & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

とつくると, z_1, z_2, z_3 が解であることは明らかであろう．これを展開すると

$$z''' + p_1 z'' + p_2 z' + p_3 z = 0$$

という微分方程式となる．逆に, このような3階の常微分方程式があれば, その独立な3つの解を並べて, 射影平面への曲線が得られる．ここで注意すべきことは, 曲線と微分方程式の対応は一意的ではないことである．実際, 零でない関数 ρ によって, ρz という写像を考えても, 同じ曲線が得られるが,

上の作り方より，微分方程式の形は変る．特に，ρ をうまく取れば，いつも $p_1 = 0$ とすることができることに気がつく．それを，

$$z''' + P_2 z' + P_3 z = 0$$

とかこう．このとき，f についての微分方程式

$$\{f; x\} = \frac{1}{4} P_2 \tag{2}$$

を解き，新しい変数として x の代りに $y = f(x)$，新しい未知関数を z の代りに $w = f'z$ を取ると，w の y に関する微分方程式は

$$\frac{d^3 w}{dy^3} + Rw = 0$$

の形になる．計算をすすめると $R = (P_3 - P_2'/2)/(f')^3$ であることもわかる．ここまでくれば，曲線から一意的に微分方程式を導いたと云える．特に，変数もかってではなく，(2) の方程式の解の任意性は一次分数変換であるから，それだけの自由度を持って，決まったことになる．一般に一次分数変換の自由度を除いて変数が決まることを，射影構造がはいるという．従って，射影平面内の曲線があれば，自然に曲線上に射影構造が定まり，２つの曲線の違いは 量 R で記述されるということになる．
注： 実は R そのものと言うより，Rdy^3 なる微分形式が曲線の不変量であるというほうが正確である．
　一般の次元の場合も，これと同じような記述が可能であり，そのことを Laguerre-Forsyth の（射影曲線の）理論という．ところで，上記の R は，最初の方程式の係数 p_1, p_2, p_3 とそれらの微分を使って表される．勿論，写像 z とその微分を使って表される．これを，（射影曲線に付随する）Schwarz 微分と云うのはどうであろうか？

5. 多変数の Schwarz 微分

　この節では写像

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \mapsto z(x) = [z^0(x), \ldots, z^n(x)] \in \mathbf{P}^n$$

の $\mathbf{P}^n$ の運動群 $\mathrm{PGL}(n+1)$ による分類を考える．１９世紀の後半になって，有理関数係数の線形微分方程式（系）の代数関数解を知りたい，すべての

解が代数関数である方程式（系）を求めたいという欲求が (何故か) 出てきた．解は一般に一価ではなく，特異点の廻りを回れば他の分岐に移り合うことになるが，あるべき代数関係式は不変であろう．だから，多価性を表す分数変換で不変な形式を方程式（系）の係数からつくることが主眼になった．J. Liouville, P. Pepin, L. Fuchs, F. Klein, F. Brioschi, C. Jordan, E. Goursat 達が，1870 年代を中心として，盛んに一般論をつくろうとした．上記の Schwarz の論文はそれを超幾何方程式について実行したものである．P. Painlevé もその一人で，1887 年に独立な解の個数が 3 である 2 変数の方程式系の不変式を求めている．1887.5.31 付けの Compte Rendus の記事及び E. Goursat の 1887.5.16 付けの Compte Rendus の記事がそれである．これらの歴史的背景については

> A. Boulanger, Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires homogènes intégrable algébriquement, Journal de L'École Polytechnique, 4(1898), 1–122

を参照．彼らの考えたことは次の通りである．(x, y) を変数とする源空間からの多価の写像

$$(x, y) \mapsto (u, v)$$

があり，その多価性が分数変換

$$(u, v) \mapsto (U, V) = \left(\frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}, \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''} \right)$$

で表わさられるとき，u, v, U, V の (x, y) についての微分を含む '簡単' な関係式で，係数 a, b, c, a', ... によらないものを求めよという問題である．以下いちいち言わなくても写像の像が源の次元より小さくなって潰れることはない即ち非退化とする．この記事の最初に掲げた入試問題に毛が生えた程度でしょう．やってみて下さい．見つかりましたか？天下って申し訳ないけど

$$I(u, v) = \frac{u_{xx}v_x - v_{xx}u_x}{u_x v_y - v_x u_y}, \qquad J(u, v) = \frac{v_{yy}u_y - u_{yy}v_y}{u_x v_y - v_x u_y},$$

$$M(u, v) = \frac{u_{xx}v_y - v_{xx}u_y + 2(u_{xy}v_x - v_{xy}u_x)}{3(u_x v_y - v_x u_y)},$$

$$N(u, v) = \frac{v_{yy}u_x - u_{yy}v_x + 2(v_{xy}u_x - u_{xy}v_x)}{3(u_x v_y - v_x u_y)}$$

とおけば,

$$I(u,v) = I(U,V), \quad J(u,v) = J(U,V), \quad M(u,v) = M(U,V), \quad N(u,v) = N(U,V)$$

となる, と言うのが彼らの得た関係である. 入試問題よりややこしい筈なのに, 3次の微分がないことに気が付かれましたか. これらの式を何か適当な形容詞を付けて何とかSchwarz微分と呼んでしまってもいいのだけど, まっ, とりあえず先人にならって基本不変微分式と呼ばせて下さい.

次に, 写像 $(x,y) \mapsto (u,v)$ から, 関数 z^0, z^1, z^2 を

$$z^0 = \rho = (u_x v_y - u_y v_x)^{-1/3}, \qquad z^1 = u\rho, \qquad z^2 = u\rho$$

と, 定める. 源空間 (x,y) から射影平面 $\mathbf{P}^2$ への写像としては $[1,u,v] = [z^0,z^1,z^2]$ である. そこで, z^0, z^1, z^2 を解とする微分方程式系を求めよう. z を未知関数とすると,

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_x & z_y & z \\ z^0_{xx} & z^0_x & z^0_y & z^0 \\ z^1_{xx} & z^1_x & z^1_y & z^1 \\ z^2_{xx} & z^2_x & z^2_y & z^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} z_{xy} & z_x & z_y & z \\ z^0_{xy} & z^0_x & z^0_y & z^0 \\ z^1_{xy} & z^1_x & z^1_y & z^1 \\ z^2_{xy} & z^2_x & z^2_y & z^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} z_{yy} & z_x & z_y & z \\ z^0_{yy} & z^0_x & z^0_y & z^0 \\ z^1_{yy} & z^1_x & z^1_y & z^1 \\ z^2_{yy} & z^2_x & z^2_y & z^2 \end{vmatrix} = 0$$

の3つが求めるものである. これらを展開した式の z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} の係数は

$$\begin{vmatrix} z^0_x & z^0_y & z^0 \\ z^1_x & z^1_y & z^1 \\ z^2_x & z^2_y & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_x & \rho_y & \rho \\ u_x\rho & u_y\rho & 0 \\ v_x\rho & v_y\rho & 0 \end{vmatrix} = (\rho)^3(u_x v_y - u_y v_x) = 1.$$

他の係数も丁寧に計算すると, 前述の形式を使って

$$\begin{aligned} z_{xx} &= Mz_x - Iz_y + Az, \\ z_{xy} &= -Nz_x - Mz_y + Bz, \\ z_{yy} &= -Jz_x + Nz_y + Cz \end{aligned}$$

と書かれる．さらに,

$$A=2(M^2+IN)-M_x+I_y,\quad B=IJ-MN+M_y+N_x,\quad C=2(N^2+JM)-N_y+J_x$$

となる．この計算は次のようにまとめることができる．一般に (x,y) 空間から $\mathbf{P}^2$ への写像

$$(x,y)\mapsto z=[z^0,z^1,z^2]\in\mathbf{P}^2$$

の各成分は, 微分方程式系

$$z_{xx}=p_1z_x+q_1z_y+r_1z,\quad z_{xy}=p_2z_x+q_2z_y+r_2z,\quad z_{yy}=p_3z_x+q_3z_y+r_3z$$

を満たす．射影平面への写像としては z と ρz （ρ は零でない関数）は同じであるので, 係数 p_i, q_i, r_i は一意的には決まらないが, ρ をうまくとれば,

$$p_1+q_2=0,\qquad q_3+p_2=0$$

とできることがわかる．このとき, 係数は一意的に決まり, 上のような微分不変式を用いた表示ができるということを意味している．すなわち, 微分方程式の「解と係数の関係」が与えられるわけである．

以上の計算は一般次元ではどうなるだろうか．記号の整理も兼ねてやってみよう, 2 変数でやるよりも n 変数でやった方が式は短くなるものだからである．考えるべきは, 写像

$$(x^1,\dots,x^n)\mapsto(z^1,\dots,z^n)$$

であり, $j(z,x)=(j_i^k)$; $j_i^k=\partial z^k/\partial x^i$ を Jacobi 行列, $J_i^k(z,x)=\partial x^k/\partial z^i$ をその逆行列の成分とする．写像は非退化, すなわち, $\det j(z,x)\neq 0$ と仮定する．このとき

$$\sigma(z,x)=\frac{1}{n+1}\log\det j(z,x),\qquad \sigma_i(z,x)=\frac{\partial\sigma}{\partial x^i},$$

$$\gamma_{ij}^k(z,x)=\sum_\ell\frac{\partial^2z^\ell}{\partial x^i\partial x^j}J_\ell^k(z,x)$$

と置き, 遂に写像 $z(x)$ の Schwarz 微分（係数）を

$$S_{ij}^k(z;x)=\gamma_{ij}^k(z,x)-\delta_i^k\sigma_j(z,x)-\delta_j^k\sigma_i(z,x)$$

で定義する．

$n=1$ のとき, これは零であることに注意. 以下 $n\geq 2$ とする. $n=2$ のとき, この Schwarz 微分が前述の基本不変微分式に一致することの検証は読者に譲る. すぐわかることであるが,

$$S^k_{ij}(z;x)=S^k_{ji}(z;x), \qquad \sum_k S^k_{ik}=0$$

である. １変数の Schwarz 微分と比較すべき性質をまとめとこう. $A\in \mathrm{PGL}(n+1)$ に対して, Az を z の一次分数変換とする. このとき証明は機械的計算で出来るので省略するが

$$\boxed{\begin{array}{c} S^k_{ij}(Az;x)=S^k_{ij}(z;x) \\ S^k_{ij}(z;x)=0 \longleftrightarrow z=Ax \end{array}}$$

さらに, 非退化な写像 $x\mapsto y$ によって変数を取り替えると接続公式

$$\boxed{S^k_{ij}(z;y)-\sum_{p,q,r} S^r_{pq}(z;x)j^p_i(x;y)j^q_j(x;y)J^k_r(x,y)=S^k_{ij}(x;y)}$$

が成立する. これから次の帰結が得られる.

命題: ２つの写像 z_1 と z_2 が射影的に同値あることの必要十分条件は

$$S^k_{ij}(z_1;x)=S^k_{ij}(z_2;x)$$

がすべての i, j, k について成立することである.

$\rho=(\det j(z,x))^{-1/(n+1)}$ とするとき, $z^0=\rho,\rho z^1,\ldots,\rho z^n$ のみたす方程式は

$$z_{ij}=\sum_k S^k_{ij}z_k+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{\ell,k} S^\ell_{ik}S^k_{\ell j}-\sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}S^k_{ij}\right) \tag{3}$$

で与えられる. これが「解と係数の関係」である.

6. １つの応用

このSchwarz微分を通しての, 微分方程式の解と係数の関係はぎょう倖をもたらすことがある. 最近, 筆者達は 非特異３次曲面全体のなす moduli 空間 M の一意化方程式を求めることをこの関係を使って行った. この moduli 空間は４次元であり, その具体的表示は以下に説明する. 筆者達にとっては悔しい論文

D.Allcock, J. Carlson, and D. Toledo, A complex hyperbolic structure for moduli of cubic surfaces, Compte Rendus Acad. Sci. 326(1998), 49–54

で, 彼らは$\mathbf{P}^3$内の３次曲面の補空間（の三重被覆）上の周期積分を考えることによってmoduli空間から複素４次元球への周期写像を構成し, このmoduli空間が複素４次元球体

$$B_4 = \{[z^0, \ldots, z^4] \in \mathbf{P}^4 \mid |z^1|^2 + \cdots + |z^4|^2 < |z^0|^2\}$$

のある離散群に関する商として表される (M に複素双曲構造が入るといっても同じ）ことを示した．このことは自然な射影 $B_4 \to M$ の逆である（多価）周期写像

$$f : M \ni x \longmapsto z \in B_4$$

が M 上の微分方程式系の解で表されることを示している．このような状況は代数曲線の族やK3曲面の族（の周期写像）を記述するGaussの超幾何方程式や多変数の超幾何方程式を想起させる．3次曲面の族を記述する新しい方程式が見つかれば楽しそうである： これぞ「数学のたのしみ」.

さて, 具体的な話に入る前に今の話題の位置付けのために, 岩波の数学辞典の代数幾何の項の「歴史的展望」の始めの数行を引用しておく：いわゆる初等解析幾何で2次曲線（面）はよく分かったから, 次は3次, 4次, $\cdots$ と研究されるようになるが, これらは解析幾何（または射影幾何）に属していることで, 代数幾何と名付けるほどのことではない.

非特異３次曲面は$\mathbf{P}^2$ の６個の点でblowup（未だに適当な和訳を思いつかない、「風船を膨らます」ではどうだ）した曲面として実現される．ただし, どの３個の点も直線上に並んでいないことと６個の点がどんな２次曲線上にもないことが必要である．$\mathbf{P}^2$ の点は３個の同次座標で表されるので, これを６個並べて, 3×6 行列が得られる．同次座標の取り方に曲面は依らないので, 最初の４個が $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$ になるように座標を決めると, この行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x^1 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}$$

と表される．点の配置の条件は

$$D(x) \;:=\; x^1x^2x^3x^4(x^1-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^1x^4-x^2x^3)$$

$$\times(x^1-x^2)(x^1-x^3)(x^2-x^4)(x^3-x^4)$$
$$\times\{(x^1-1)(x^4-1)-(x^2-1)(x^3-1)\}$$
$$\times\{x^1(x^2-1)(x^3-1)x^4-(x^1-1)x^2x^3(x^4-1)\}$$

が零でないことである．従って, moduli 空間 M は

$$\{x=(x^1,\dots,x^4)\in\mathbf{C}^4 \mid D(x)\neq 0\}$$

と表示される．周期写像 $f:M\to\mathbf{P}^4$ の $x=(x^1,x^2,x^3,x^4)$ に関する Schwarz 微分を S^k_{ij} と書くと, 求める微分方程式系は

$$z_{ij}=\sum_k S^k_{ij}z_k+S_{ij}z$$

となるはずである． S_{ij} は (3) のように, S^k_{ij} から決まる． 大事なことは, Schwarz 微分が PGL(4) 不変なことより, S^k_{ij} は x についての有理関数となり, その極は $D(x)=0$ にのみあることである．しかし, この情報からだけで, S^k_{ij} が決まるだろうか．この困難は, 幸なことであるが, 空間 M の自己同型群がかなり大きい, すなわち, 空間 M の対称性が高いことによって救われる．実際, M の自己同型群は E_6 型の Weyl 群を含んでいることが知られていて, この群の作用によって, 方程式が不変であることが１つの手がかりとなる．もう１つの手がかりは, S^k_{ij} の特異性は, あらかじめ極がわかっていることと次の（計算すれば誰にでも示せる）補題により強い制限を受けることである．

補題: $n\geq 2$ とする．写像 $z=(z^1,\dots,z^n)$ が $x^1=0$ で分岐していて, そのようすが

$$z^1(x)=(x^1)^\alpha v^1,\quad z^2(x)=v^2,\dots,z^n(x)=v^n,\quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|=(x^1)^{\alpha-1}u,$$

とかけるとする．ただし, $v^j(1\leq j\leq n)$ 及び u は x^1 では割れない正則関数であるとする．このとき,

$$S^k_{ij}\{z;x\},\quad S^k_{1j}\{z;x\}+\delta^k_j\tfrac{1}{n+1}\tfrac{\alpha-1}{x^1},\quad (x^1)^{-1}S^1_{ij}\{z;x\},$$
$$S^1_{1j}\{z;x\},\quad x^1S^k_{11}\{z;x\},\quad S^1_{11}\{z;x\}-\tfrac{n-1}{n+1}\tfrac{\alpha-1}{x^1}$$

は $2\leq i,j,k\leq n$ のとき, 正則である．

これらの手掛かりを使って, 機械的計算により S^k_{ij} は x の有理式として求まる．筆者達が新しい素晴らしい方程式を発見したと喜んだのはほんの数ヶ

月間で, 実はこの方程式は 9 変数の Appell-Lauricella の超幾何方程式から, 制限・特殊化・変数変換を経て得られることが

T.Terasoma and K. Matsumoto: Theta constants associated to cubic threefolds, math.AG/0008024
T. Sasaki and M. Yoshida, The uniformizing differential equation of the complex hyperbolic structure on the moduli space of marked cubic surfaces II, math.AG/0008026

により判明した. というわけで真に新しいとは主張しないけれども, 「どんな有限群も（大学１年生で習うので, つい分かったつもりになってしまう）対称群の部分群じゃあないか」とうそぶきたくなるのである.

7. 補足

Schwarz 微分は関数論において, また, 堆肥村（Teichmüller）空間の研究において基本的な道具として使われる. ここでは, 関数の単葉性の示す上で重要な根張（Nehari）の定理を引用しておこう.
定理： $|x| < 1$ 上の正則関数 z が単葉ならば $|\{z; x\}| \le 6(1-|z|^2)^{-2}$ となり, 逆に $|\{z; x\}| \le 2(1-|z|^2)^{-2}$ ならば, z は単葉である.
これから, 種数 g の堆肥村空間の $\mathbf{C}^{3g-3}$ への Bers 埋め込みの像の有界性が証明される.

Schwarz 微分はここで述べた他に, 別の観点から様々な一般化が行われている.

O. Kobayashi and M. Wada, Circular geometry and the Schwarzian, to appear in Far East Jounral of Mathematical Sciences

では, ２つの Riemann 多様体 (M, g_M), (N, g_N) の間の非退化写像の Schwarz 微分を定義し, この根張の定理の一般化を行っている.

他方

H. Sato, Schwarzian derivatives of contact diffeomorphisms, Lobachevskii Jounral of Math. 4(1999), 89–98

は２階の常微分方程式 $y'' = f(x, y, y')$ の (x, y) 空間の変換で 方程式 $y'' = 0$ に帰着するための障害に, 上で述べた基本微分不変式 I, J, M, N があらわれることを注意し, ３階の常微分方程式 $y''' = f(x, y, y', y'')$ を (x, y, y') 空間

の接触変換で $y''' = 0$ に帰着できるかどうかの障害をあらわす微分不変式を求め, これを接触 Schwarz 微分と呼んでいる.

蛇足 1：以上の記事の中に「何故」という文字列は何回出てきたでしょう. 本当の研究はこの「何故」を考えることから始まるような気がする.

蛇足 2：以上の記事の中に片仮名は何箇所出てきたでしょう. 筆者達の最近の研究によれば「片仮名使用頻度と頭脳劣化係数とは比例する」のである.

（さききき・たけし/神戸大学）
（よしだ・まさあき/九州大学）