曲面論と超幾何関数

神戸大学理学部 佐々木 武

2006.3.8-9 札幌

目次
1. はじめに — Clausen の公式
2. ３階の常微分方程式 — 平面曲線
3. ４階の常微分方程式の不変量
4. 歴史
5. アペルの超幾何関数と超幾何微分方程式系
6. 微分方程式系 $z_{xx} = \ell z_{xy} + az_x + bz_y + pz,\ z_{yy} = mz_{xy} + cz_x + dz_y + qz$ の不変量
7. ガウス関係式
8. 曲面の変換

この講義ではガウスの超幾何関数の２つの一般化について取り上げる。１つは微分方程式の階数が３以上になる一般型超幾何方程式で、もう１つは変数の数が２のアペルの超幾何微分方程式である。

1 はじめに — Clausen の公式

超幾何関数 ${}_3F_2$ は次の級数で定義される。

$$ {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, n)(a_2, n)(a_3, n)}{(b_1, n)(b_2, n)(1, n)} x^n. $$

ガウスの超幾何関数の場合と同様に、次の方程式をみたすことが確かめられる。

$$ ({}_3E_2) \qquad \theta(\theta + b_1 - 1)(\theta + b_2 - 1)z - x(\theta + a_1)(\theta + a_2)(\theta + a_3)z = 0. $$

この講義では、1828 年に Clausen により示された次の等式を巡って話を始める。

$$ {}_3F_2(2a, a+b, 2b; a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b; x) = \left(F(a, b; a+b+\frac{1}{2}; x) \right)^2. $$

パラメータを制限すると、この公式から次の関係が得られる。

$$ {}_3F_2(1/2, 1/2, 1/2; 1, 1; x) = \left(F(1/4, 1/4; 1; x) \right)^2. $$

この等式の面白い点は、x を実数に限ると左辺が負にならないという点である。この事実は、かつて、単位円上の単葉関数の係数評価についての Bieberbach 予想の解決に使われたこと (de Branges, Acta Math. 1985) で有名である。

2　３階の常微分方程式 — 平面曲線

変数を x とする３階の常微分方程式を次のように書く。

$$z''' + p_1 z'' + p_2 z' + p_3 z = 0. \tag{2.1}$$

３つの線形独立な解 z^1, z^2, z^3 を取り、x-空間から $\mathbf{P}^2$ への写像を

$$x \longmapsto [z^1, z^2, z^3] \in \mathbf{P}^2$$

と定める。これは $\mathbf{P}^2$ 内の平面曲線と思える。解の取り方を変えてもそれらの組は互いに線形変換で移り合うので、この曲線は $\mathbf{P}^2$ の射影変換を除いて定まっている。逆に、平面曲線はパラメータ表示を１つ定めれば、その座標のみたす３階の常微分方程式が得られる。そこで、３階の常微分方程式は平面曲線のことであるということにする。

次に、この常微分方程式の形を簡単にすることを考えたい。先ず、２階の場合を振り返っておこう。講義「私は超幾何関数」にあるように、微分方程式

$$u'' + pu' + qu = 0$$

は未知関数 u をスカラー関数 f を使って $u = fv$ と変えると

$$v'' + \left(p + 2\frac{f'}{f}\right) v + \left(q + \frac{f'}{f} p + \frac{f''}{f}\right) v = 0$$

となる。ここで、f を $p + 2f'/f = 0$ となるように定めると、さらに

$$v'' + Qv = 0$$

と簡単化される。少し計算してみれば

$$Q = q - \frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2$$

であることがわかる。この Q とは何であろうか。今、最初の方程式の２つの独立な解を z^1, z^2 とし、$g = z^1/z^2$ としてみる。すると少々の計算により

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 \tag{2.2}$$

という式が示される。右辺は z^1 や z^2 の定め方に依っているようであるが、上の等式はそれらに依らないことを主張している。歴史的な理由により、(2.2) の右辺を g の <u>シュバルツ微分</u> という。幾何的な表現をすると、Q は写像

$$x \longmapsto [z^1, z^2] \in \mathbf{P}$$

からのみ定まっているといえる。

２階の方程式を簡単化したこの手続きを、３階の場合にやってみよう。最初に $z = \lambda w$ とおく。

$$\begin{aligned} z' &= \lambda w' + \lambda' w, \\ z'' &= \lambda w'' + 2\lambda' w' + \lambda'' w, \\ z''' &= \lambda w''' + 3\lambda' w'' + 3\lambda'' w' + \lambda''' w \end{aligned}$$

より、w についての方程式は

$$\lambda w''' + (3\lambda' + p_1)w'' + (3\lambda'' + 2p_1\lambda' + p_2\lambda)w' + (\lambda''' + p_1\lambda'' + p_2\lambda' + p_3\lambda)w = 0$$

となる。ここで、λ を $3\lambda' + p_1\lambda = 0$ となるように定めると

$$w''' + P_2 w' + P_3 w = 0 \tag{2.3}$$

である。ただし、

$$P_2 = p_2 - p_1^2/3 - p_1', \quad P_3 = p_3 + 2(p_1)^3/27 - p_1p_2/3 - p_1''/3.$$

次に、変数 (x, w) を $t = f(x)$, $w = g(x)u$ により、(t, u) に変えて、方程式を書き直す。t に関する微分を "$\cdot$" と表すと、

$$\begin{aligned} w' &= g'u + gf'\dot{u} \\ w'' &= g''u + (2g'f' + gf'')\dot{u} + g(f')^2\ddot{u} \\ w''' &= g'''u + (3g''f' + 3g'f'' + gf''')\dot{u} + 3(g'(f')^2 + gf'f'')\ddot{u} + g(f')^3\dddot{u}. \end{aligned}$$

だから、２階の係数が消えるためには、

$$g'(f')^2 + gf'f'' = 0$$

が必要である。これを仮定して方程式を書き下すと

$$(f')^2\dddot{u} + (P_2 - 4\{f;t\})\dot{u} + [P_3/f' - f''P_2/(f')^2 - f'''/(f')^2 + 2(f''^2/(f')^3)']u = 0$$

となる。そこで、$\{f;x\} = P_2/4$ により f を決める。すると、

$$d^3u/dt^3 + pu = 0, \qquad p = (P_3 - P_2'/2)/(f')^3. \tag{2.4}$$

この簡単化では、２階の場合と違い、変数 x も新たに選び直している。この計算から

$$pdt^3 = (P_3 - P_2'/2)dx^3$$

であることもわかり、右辺が最初の方程式から決まっていることから、左辺の３次の微分形式が、関数 f の取り方によっていないことがわかる。しかも、シュバルツ微分の射影不変性より、パラメータ t は一次分数変換を除いて定まったことになる。一般に、多様体上の座標を一次分数変換を除いて定めることができるとき、その多様体は射影構造を持つというので、３階の常微分方程式で定められる曲線上に、上のようにして射影構造が定まったということができる。

さて、$p = 0$ となる曲線は、$d^3u/dt^3 = 0$ という方程式で表される。1, t, t^2 がその方程式の独立解であるから、取りも直さず２次曲線を表していることに注意しておこう。

以上は、平面曲線の局所的な扱いであり、特別な方程式を取り上げたものではない。以下に、幾つかの例を挙げる。

例 2.1

$$z''' + \frac{a}{x^2}z' + \frac{b}{x^3}z = 0$$

では、$P_3 - P_2'/2 = (a + b)/x^3$ であるから、この方程式が２次曲線を定めるのは $a + b = 0$ となるとき。

演習 2.2 方程式 $({}_3F_2)$ について、$p=0$ となるようにパラメータ $(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ を定めよ。特に、$(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)=(2a,a+b,2b;a+b+\frac{1}{2},2a+2b)$ のとき、$p=0$ となることを確かめよ。

例 2.3 (Jordan-Pochhammer 方程式)

$$Qz''' - \left(\mu Q' + R\right)z'' + \left(\frac{\mu(\mu+1)}{2}Q'' + (m+1)R'\right)z'$$
$$- \left(\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{6}Q''' + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}R''\right)z = 0$$

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c). \qquad R(x) = Q(x)\left(\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c}\right).$$

Jordan-Pochhammer 方程式は一般の階数で定義されている。上の表示は後で触れるアペルの超幾何関数 F_1 のみたす微分方程式系に付随して現れる。次の積分を解に持っていることが知られている。

$$\int (u-a)^{\alpha-1}(u-b)^{\beta-1}(u-c)^{\gamma-1}(u-x)^{\mu+2}dy$$

例 2.4 (Beukers-Peters, 1984, J. Reine Angew. Math. 351)

$$(x^4 - 34x^3 + x^2)z''' + (6x^3 - 153x^2 + 3x)z'' + (7x^2 - 112x + 1)z' + (x-5)z = 0.$$

この方程式系はある $K3$ 曲面の１次元族 (x がパラメータ) の周期写像のみたす方程式である。次の例でも同様であるが、周期写像はリーマン関係式と呼ばれる２次の関係式を満たす。そのことから、不変量 pdt^3 は消えているはずである。(実際、計算をして納得して下さい。) この方程式の独立な解の形も分かっている。$x=0$ で正則な級数解は

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

で与えられる。

例 2.5 (H. Verrill, 1995, J. Math. Kyoto Univ.)

$$x(x+4)(x-12)z''' + 6(x^2 - 7x + 12)z'' + \frac{7x^2 - 12x - 96}{x+4}z' + \frac{x}{x+4}z = 0.$$

これも $K3$ 曲面のある１次元族の周期写像を与える方程式であり、やはり $p=0$ である。

演習 2.6 いま、２階の常微分方程式 $u'' + qu = 0$ があるとき、$z = u^2$ のみたす３階の常微分方程式が $z''' + 4qz' + 2q'z = 0$ であることを示せ。$p=0$ であることを確かめよ。$F(a,b;a+b+1/2;x)^2$ が ${}_3E_2(2a,a+b,2b;2a+2b,a+b+1/2)$ をみたすことを確かめよ。

${}_3E_2$のパラメータについて

方程式 ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ をみて明らかなように、パラメータを組 $\{a_1,a_2,a_3\}$ と $\{b_1,b_2\}$ の中で入れ替えても変わらない。これ以外にも次ぎのような対称性がある。$x^{1-b_1}{}_3F_2(a_1+1-b_1,a_2+1-b_1,a_3+1-b_1;2-b_1,b_2+1-b_1;x)$ 及び $x^{-a_1}{}_3F_2(a_1,a_1+1-b_1,a_1+1-b_2;a_1+1-a_2,a_1+1-a_3;1/x)$ は ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ の解であるので、曲線としては ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$, ${}_3E_2(a_1+1-b_1,a_2+1-b_1,a_3+1-b_1;2-b_1,b_2+1-b_1)$, ${}_3E_2(a_1,a_1+1-b_1,a_1+1-b_2;a_1+1-a_2,a_1+1-a_3)$ は同値と思ってよい。さらに、次のような変数変換の公式も知られている。

$$\begin{aligned}
&{}_3F_2(a,a+\lambda,a+\mu;1-\lambda,1-\mu;x)\\
&\qquad=(1-x)^{-a}{}_3F_2(a/2,(a+1)/2,1-a-\lambda-\mu;1-\lambda,1-\mu;-4x(1-x)^2).\\
&{}_3F_2(a,a+2\lambda,a+2\mu;1-\lambda,1-\mu;x)\\
&\qquad=(1-4x)^{-a}{}_3F_2(a/3,(a+1)/3,(a+2)/3;1-\lambda,1-\mu;-27x(1-4x)^{-3}).\\
&{}_3F_2(4a,4a+1/3,4a+\lambda/3;1/3,2/3;x)\\
&\qquad=(1-x)^{-3a}{}_3F_2(a,a+1/3,a+\lambda/3;1/3,2/3;x(x+8)^3(x-1)^{-3}/64).
\end{aligned}$$

それぞれ F. Whipple(1927), W. Baily(1929), M. Kato(2006) の公式である。(ガウスの超幾何関数や ${}_3F_2$, その一般化である ${}_{p+1}F_p$ などの特殊値や上記のような変換公式には沢山の文献があるので、「予備講義」の参考文献の文献表から検索して下さい。)

双対曲線について

平面曲線の各点 $z(x)\in\mathbf{P}^2$ に対して、その接線は $z(x)$ と $z'(x)$ の一次結合で表される。それを外積を用いて $Z(x)=z\wedge z'$ で表現する。$\mathbf{P}^2\wedge\mathbf{P}^2$ は $\mathbf{P}^2$ の双対空間とよばれるが、$\mathbf{P}^2$ と同一視して構わない。Z の描く曲線を z の双対曲線という。Z も３階の常微分方程式をみたす。(2.1) に対しては

$$Z'''+2p_1Z''+(p_1'+p_1^2+p_2)Z'+(p_2'+p_1p_2-p_3)Z=0$$

である。これを２階微分の係数が消える形に直すと

$$Z'''+(p_2-p_1'-p_1^2/3)Z'+(p_2'-2p_1''/3-p_3-2p_1^3/27+p_1p_2/3-2p_1p_1'/3)Z=0$$

となっている。これから特に、不変量は $-pdt^3$ に一致することが計算によってわかる。すなわち、双対曲線の不変量は元の曲線の不変量の符号を変えたものである。特に、「$p=0\longleftrightarrow z$ と Z が射影同値」ということになる。

演習 2.7 ${}_3E_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2)$ の双対方程式は ${}_3E_2(1-a_1,1-a_2,1-a_3;2-b_1,2-b_1)$ に等しいことを示せ。

３次曲線

この節の最後に、平面曲線が３次曲線になる条件を不変量 p を使って表すことができることを述べる。方程式 (2.1) に対して

$$\begin{aligned}
S=21(15pp'''-20p'p''-567p^3)(20p'p''-15pp'''+63p^3)&\\
+100(6pp''-7p'^2)(7pp''''-12p''^2-882p^2p')&
\end{aligned}$$

とおく。このとき、Sdt^{15} は方程式の形によらない不変量となっている。「$S=0\longleftrightarrow$ ３次曲線」が知られている。(証明には [Wil] を参照)。

例 2.8 方程式 ${}_3E_2(1/9,4/9,7/9;2/3,7/6)$ は $S=0$ となる例である。実際、

$$z_1 = {}_3F_2(1/9,4/9,7/9;2/3,7/6;x), \quad z_2 = x^{1/3}{}_3F_2(4/9,7/9,10/9;4/3,3/2;x),$$
$$z_3 = x^{-1/6}{}_3F_2(-1/18,5/18,11/18;5/6,1/2;x)$$

とおくと、$(z_1)^3 - z_2(z_3)^2 - (z_2)^3/729 = 0$ を満たしていることがわかる。

演習 2.9 方程式 ${}_3E_2$ について、$S=0$ となる場合を全て求めよ。この計算のためには、S の表示を方程式 (2.3) について求める必要がある。実際次ぎのように表される。

$$\begin{aligned} S \;=\; & 16800AA_2A_4 + 50400A_3A_1A_2 + 113400AA_3A_1Q - 36400A_1^2QA_2 - 6300A^2A_1QQ_1 \\ & -184800AQ_1A_1A_2 - 18900AA_3^2 + 793800A^3A_3 - 42525A^3Q_1^2 - 1190700A^4Q_1 \\ & -129600A^3Q^3 + 2469600AA_1^3 + 56700A^2A_3Q_1 - 270900AA_1^2Q^2 + 793800A^3A_1Q \\ & -3175200A^2A_1A_2 - 55200AA_2^2Q + 234000A^2A_2Q^2 - 25200A^2A_2Q_2 \\ & -25200A^2QA_4 + 37800A^3QQ_2 - 19600A_1^2A_4 + 127400A_1^3Q_1 + 29400AA_1^2Q_2 \\ & -3000564A^5 - 28800A_2^3, \end{aligned}$$

ただし、$Q=P_2$, $Q_1=Q'$, $Q_2=Q''$, $A=P_3-P_2'/2$, $A_1=A'$, $A_2=A''$, $A_3=A'''$, $A_4=A''''$.

3　４階の常微分方程式の不変量

３階で計算した方法を４階の常微分方程式

$$z'''' + p_1z''' + p_2z'' + p_3z' + p_4z = 0$$

に適用してみよう。今度は、独立な解 z^1, z^2, z^3, z^4 に対して写像

$$z:(t) \longrightarrow [z^1(t), z^2(t), z^3(t), z^4(t)] \in \mathbf{P}^3$$

によって、空間曲線が定まるので、空間曲線の不変量を求めることと同じである。結果は、新しい未知関数 u と適当な変数 t について

$$\ddddot{u} + 4r_3(t)\dot{z} + r_4(t)z = 0$$

の形に直すことができる。その計算は３階よりはややこしい。これからわかることをまとめると次のようになる。

- 径数 t は一次分数変換を除き、一意的に定まる。
- r_3dt^3 と $(r_4 - 2\dot{r}_3)dt^4$ は表現によらない不変量である。

不変量 r_3dt^3 の幾何的意味は次の通り。３階の場合と同じように直線 $\ell(t) = u\wedge\dot{u}$ を考える。今度は $\mathbf{P}^3\wedge\mathbf{P}^3 \equiv \mathbf{P}^5$ の点を定める。直線を $\mathbf{P}^5$ の点で径数化することを Plücker 埋め込みといい、その全体は $\mathbf{P}^5$ の２次曲面 (Q_4 と書く) になる。今の場合、空間曲線の各点が Q_4 の各点を定めている。それは一般に Q_4 内の曲線となるが、「$r_3=0 \longleftrightarrow \ell(t)$ がある超平面に含まれる」ということが示される。そのためには、ℓ が５階の常微分方程式をみたすことと $r_3=0$ が同値であることを示せばよく、それは読者にまかせる。

例 3.1 (Batyrev-van Straten, 1995, Comm. Math. Phys. 168) $\theta = xd/dx$

$$\theta^4 - 3x(27\theta^4 + 54\theta^3 + 56\theta^2 + 29\theta + 6) + 81x^2(\theta+1)^2(27\theta^2 + 54\theta + 40) \\ -2187x^2(3\theta+5)(3\theta+4)(\theta+2)(\theta+1) = 0$$

$$(1-216x)(1+27x)\theta^4 - 54x(7+432x)\theta^3 - 3x(10584x+95)\theta^2 \\ -48x(351x+2)\theta - (12x + 2880x^3) = 0.$$

最初の例では、$r_3 = r_4 = 0$。後の例では $r_3 = 0$ and $r_4 \neq 0$。

例 3.2 ${}_4E_3(1/2, 1/2, 1/2, 1/2; 1, 1, 1)$ について、$r_3 = 0$。

4 歴史

これまで述べた一般論は E.J. Wilczynski (1876–1932) による [Wil] に詳しい。Wilczynski は Lazarus Fuchs のもとで 1897 年に学位 (ベルリン大学) を取り、California 大学 (1898–1907), Illinois 大学 (–1910), Chicago 大学 (–1926) に勤めた。彼の方法は射影微分幾何という分野を生み、E. P. Lane の追悼記事 (Bull AMS 1933, 7–14) に次のように書かれている。

Wilczynski's method

- consists in associating with each configuration to be studied a certain completely integrable system of linear homogenous differential equations,
- next determines the most general transformation of dependent and independent variables that does not disturb the configuration,
- then carries out this transformation on the system of equations and calculates complete systems of invariants and covariants,
- interprets these geometrically, and studies the configurations by means of them.

常微分方程式 (の解) を射影空間内の曲線とみなして、その不変量を求めることは、最初は Halphen(1878) による。[Hal] 参照：とても分かりやすい論文である。その後、Laguerre(1879), Brioschi(1879), Forsyth(1888) と続いていて、これらを総称して Laguerre-Forsyth の理論とよんでいる。

ここで述べた方法を一般の階数の場合にそのまま延長することは得策ではない。射影空間内の曲線論の背景にあるものは射影構造とリー環 $\mathfrak{sl}$ であり、それらをまとめた論文として 背足 [Sea] が推奨できる。

少し一般的ないい方をすると、Wilczynski の方法は次の図式で表される。

$M^n \ni x \longrightarrow f(x) \in \mathbf{P}^N$　部分多様体 (を定義する写像)

$\Longleftrightarrow$ f のみたす微分方程式系

$\Longrightarrow$ 方程式系の係数と写像の関係式

方程式系から眺めるとき、写像 f をシュバルツ写像といい、係数と写像の関係を表す表現 (係数の微分多項式で表される) をシュバルツ微分という。

5　アペルの超幾何関数と超幾何微分方程式系

次の級数で定義される関数をアペルの超幾何関数という。

$$\begin{aligned}
F_1(a,b,b';c;x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m+n)(b,m)(b',n)}{(c,m+n)m!n!} x^m y^n \\
F_2(a,b,b';c,c';x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m+n)(b,m)(b',n)}{(c,m)(c',n)m!n!} x^m y^n \\
F_3(a,a',b,b';c;x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m)(a',n)(b,m)(b',n)}{(c,m+n)m!n!} x^m y^n \\
F_4(a,b;c,c';x,y) &= \sum_{m=0,n=0}^{\infty,\infty} \frac{(a,m+n)(b,m+n)}{(c,m)(c',n)m!n!} x^m y^n
\end{aligned}$$

それぞれ原点の周りで収束し、記号で示したように F_1, F_2, F_3, F_4 と呼ばれている。いずれも

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= \ell z_{xy} + a z_x + b z_y + p z, \\
z_{yy} &= m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z,
\end{aligned}$$

の形の微分方程式をみたし、それぞれの係数は次表で与えられる。

	ℓ / m	a / c	b / d	p / q
F_1	$\frac{-y}{x}$	$\frac{(a+b+1)x-c}{x(1-x)}$	$\frac{by}{x(1-x)}$	$\frac{ab}{x(1-x)}$
	$\frac{-x}{y}$	$\frac{(a+b'+1)y-c}{y(1-y)}$	$\frac{b'x}{y(1-y)}$	$\frac{ab'}{y(1-y)}$
F_2	$\frac{y}{1-x}$	$\frac{(a+b+1)x-c}{x(1-x)}$	$\frac{by}{x(1-x)}$	$\frac{ab}{x(1-x)}$
	$\frac{x}{1-y}$	$\frac{b'x}{y(1-y)}$	$\frac{(a+b'+1)y-c'}{y(1-y)}$	$\frac{ab'}{y(1-y)}$
F_3	$\frac{-y}{x(1-x)}$	$\frac{(a+b+1)x-c}{x(1-x)}$	0	$\frac{ab}{x(1-x)}$
	$\frac{-x}{y(1-y)}$	0	$\frac{(a'+b'+1)y-c}{y(1-y)}$	$\frac{a'b'}{y(1-y)}$
F_4	$\frac{2y}{1-x-y}$	$\frac{(a+b+1)x-c(1-y)}{x(1-x-y)}$	$\frac{(a+b+1)y-c'y}{x(1-x-y)}$	$\frac{ab}{x(1-x-y)}$
	$\frac{2x}{1-x-y}$	$\frac{(a+b+1)x-cx}{y(1-x-y)}$	$\frac{(a+b+1)y-c'(1-x)}{y(1-x-y)}$	$\frac{ab}{y(1-x-y)}$

6　微分方程式系 $z_{xx} = \ell z_{xy} + a z_x + b z_y + p z$, $z_{yy} = m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z$ の不変量

この方程式系の特徴的な量を取り出すため、３階微分を計算してみよう。すると、

$$\begin{aligned}
(1-\ell m) z_{xxy} &= \{\ell_y + a + bm + \ell(m_x + d + c\ell)\} z_{xy} + \{a_x + bc + \ell(c_x + ca) + \ell q\} z_x \\
&\quad + \{b_y + bd + \ell(d_x + bc) + p\} z_y + \{p_y + bq + \ell(q_x + cp)\} z
\end{aligned}$$

という表示が得られる。z_{xyy} についても同様。アペルの超幾何関数の場合には F_1 については $1-\ell m=0$ となるが、その他については $1-\ell m\neq 0$ となっている。そこで、

$$\varphi_2=\ell dx^2+2dxdy+mdy^2$$

と置く。これが関数倍を除いて(方程式系の形によらず)定まることは、次のようにして納得できる。$1-\ell m\neq 0$ とすると独立な解の個数は高々4となるので、いま、それらを z^1, z^2, z^3, z^4 とする。写像

$$(x,y)\longmapsto [z^1,z^2,z^3,z^4]\in \mathbf{P}^3$$

は $\mathbf{P}^3$ 内の曲面を定める。一方、曲面の第2基本形式は、射影変換で不変な曲面に固有の量であることがわかるので、それを求めてみると φ_2 のスカラー関数倍になっていることがわかる。すなわち、φ_2 は曲面の共形構造を定め、曲面を表示する微分方程式の形にはよらないものである。F_1 については、この形式は退化していて、独立な解は高々3である(実際3に等しい)。

次に、2次元の共形構造にはいつも $\varphi_2=2dxdy$ となる座標が取れるので、方程式系は

$$z_{xx}=az_x+bz_y+pz,\quad z_{yy}=cz_x+dz_y+qz$$

とあるとして構わない。もちろん、このような座標 (x,y) を具体的に求めることは一般には難しい。ここで、次のような計算をしてみよう。上の3階の微分の式から

$$\begin{aligned}z_{xxy}&=az_{xy}+(a_x+bc)z_x+(b_y+bd)z_y+(p_y+bq)z,\\ z_{xyy}&=dz_{xy}+(d_y+bc)z_y+(c_x+ac)z_x+(q_x+cp)z.\end{aligned}$$

これをもう一度微分すると、第1式から

$$\begin{aligned}z_{xxyy}&\equiv az_{xyy}+a_yz_{xy}+(a_x+bc)z_{xy}+(b_y+bd)z_{yy}\pmod{z_x,z_y,z}\\ &\equiv (ad+a_y)z_{xy}\pmod{z_x,z_y,z}\end{aligned}$$

同様に、第2式から

$$z_{xxyy}\equiv (ad+d_x)z_{xy}\pmod{z_x,z_y,z}$$

が得られる。したがって、$a_y=d_x$ が(4つの独立な解があるためには)必要である。すると、未知変数に適当な関数をかければ、方程式系は

$$z_{xx}=bz_y+pz,\quad z_{yy}=dz_y+qz$$

の形に直せることがわかる。このようにして、

$$\varphi_3=bdx^3+cdy^3$$

を定義する。この3次微分式が初めの方程式系及び対応する曲面から自然に定まっている。このことは、曲面論にたち戻るか、または、上記の変換を細かく追ってみることでわかるが、ここでは省略する。ただ、$\varphi_3=0$ の場合を考えてみよう。上記の表現では $b=c=0$ であり、方程式系は $z_{xx}=pz$, $z_{yy}=qz$ とさらに簡単化される。p が x のみの関数、q が y のみの関数であることはすぐわかるので、単独の方程式の独立な解をそれぞれ $z_1(x)$, $z_2(x)$ および $w_1(y)$, $w_2(y)$ としてみれば、連立の方程式の解は z_1w_1, z_2w_1, z_1w_2, z_2w_2 となり、対応する曲面は写像 $(x,y)\mapsto[z_1w_1,z_2w_1,z_1w_2,z_2w_2]$ の像であるから、2次曲面であることがわかる。実際、φ_3 は2次曲面からのずれを量る不変量である。

例 6.1 F_4 の方程式系の座標を $(x,y)=(u(1-v),v(1-u))$ により、(u,v) に変えると方程式系は次のように表示される。

$$\begin{aligned}
z_{uu} &= -\frac{ev(1-v)}{u(1-u)(1-u-v)}z_v+pz,\\
z_{vv} &= -\frac{eu(1-u)}{v(1-v)(1-u-v)}z_u+qz,\\
p &= p_0+\frac{e_1}{u(1-u)}+\frac{e_2}{u^2}+\frac{e_3}{(1-u)^2}, \qquad q=q_0+\frac{e_1}{v(1-v)}+\frac{e_3}{v^2}+\frac{e_2}{(1-v)^2},\\
p_0 &= \frac{e}{2(1-u-v)^2}+\frac{e^2}{4}\left(\frac{2}{u(1-v)}+\frac{2}{v(1-u)}-\frac{2(1-2v)}{v(1-v)(1-u-v)}+\frac{3}{(1-u-v)^2}\right),\\
q_0 &= \frac{e}{2(1-u-v)^2}+\frac{e^2}{4}\left(\frac{2}{u(1-v)}+\frac{2}{v(1-u)}-\frac{2(1-2u)}{u(1-u)(1-u-v)}+\frac{3}{(1-u-v)^2}\right).
\end{aligned}$$

ここで、$e=c+c'-a-b-1$、$e_1=(2ab-cc'+(a+b+1)e)/2$, $e_2=c(-2+c)/4$, $e_3=c'(-2+c')/4$ である。特に特徴的なことは、３次微分式 φ_3 は e のみによっていることがわかり、同時に、微分方程式は φ_2 と φ_3 だけからは定まっていないことを示している。このような性質は曲面が (射影微分幾何の意味で) 射影展開曲面になるという性質を表している。

7 ガウス関係式

ガウスの超幾何関数 $F(a,b,c;x)$ は x の関数であると同時にパラメータ (a,b,c) によっている。講義「A 超幾何関数入門」で、次の関係式が使われた。

$$\begin{gathered}
(\theta+a)F(a,b,c;x)=aF(a+1,b,c;x)\\
(\theta+b)F(a,b,c;x)=bF(a+1,b+1,c;x)\\
(\theta+c-1)F(a,b,c;x)=(c-1)F(a,b,c-1;x)
\end{gathered}$$

これからすぐに

$$cF(a,b,c)-aF(a+1,b,c+1)-(c-a)F(a,b,c+1)=0$$

がわかる。ガウスの論文 [Gauss] には、$\{F(a,b,c;x)|a,b,c\}$ がパラメータについてみたすこのような方程式が 15 ほど挙げられている。それらをガウス関係式という。ガウスの超幾何関数から様々の直交多項式系が得られ、それらのみたす差分方程式はガウス関係式から得られる。

演習 7.1 次の差分方程式が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned}
a(c-b)(1-a+b)F(a+1,b-1;c;x)-b(c-a)(1-b+a)F(a-1,b+1;c;x)\\
=(a-b)\{c-ca-cb+2ab-(1-a+b)(1-b+a)x\}F(a,b,;c;x).
\end{aligned}$$

もっと一般に、ガウスの関係式やアペルの超幾何関数について成り立つパラメータについての差分関係式全体をわかりやすく記述せよ。

F_2, F_3, F_4 については、曲面を表すベクトルを z とすると、z, z_x, z_y と z_{xy} は独立である。そこで F_3 を取り上げ、パラメータの組を便宜的に $\alpha=(a,a',b,b',c)$ とかき、別のパラメータの組を α' とすると、 $F_3(\alpha')$ は $F_3(\alpha)$, $F_{3x}(\alpha)$, $F_{3y}(\alpha)$ と $F_{3xy}(\alpha)$ を用いてかけるはずである。例えば、

$$(c-a-a'-1)F_3(a,a',b,b',c-1;x,y)=(x\partial/\partial x+y\partial/\partial y+c-1)\gamma F_3(a,a',b,b',c;x,y)$$

ただし、γ はパラメータで定まるガンマ因数を表す。この微分をも含んだ関係式は隣接関係式と呼ばれている。また、異なる５つのパラメータをもってくると、対応する５つの関数の間には有理多項式を係数とした関係式が成立し、これを一般のガウス関係式と言う。

8 曲面の変換

隣接関係式は $F_3(\alpha)$ の定める曲面と $F_3(\alpha')$ の定める曲面の関係を与えている。上記の例では曲面 $F_3(\alpha')$ の各点は曲面 $F_3(\alpha)$ の対応する点の接平面上にあるということができる。このような対応を接線叢という。

接線叢の典型的な例を次のようにしてつくることができる。曲面を定める微分方程式の係数の間に

$$b_{yyy}=4b_yq+2bq_y+2b_yc_x+bc_{xy},\quad c_{xxx}=4c_xp+2cp_x+2b_yc_x+cb_{xy}$$

という関係があるときに、曲面は射影極小であるといわれる。方程式系を

$$z_{xx}=bz_y+(\sigma-\frac{1}{2}b_y)z,\quad z_{yy}=cz_x+(\tau-\frac{1}{2}c_x)z$$

と表すとき、定数 λ $(\lambda\neq 1)$ を使って変形した方程式系

$$\bar{z}_{xx}=\lambda b\bar{z}_y+(\sigma-\frac{\lambda}{2}b_y)\bar{z},\quad \bar{z}_{yy}=\frac{1}{\lambda}c\bar{z}_x+(\tau-\frac{1}{2\lambda}c_x)\bar{z}$$

も４つの解をもつ。この方程式系の２つの独立な解を φ、ψ とし、

$$A=-\lambda(\psi\varphi_y-\varphi\psi_y),\quad B=\psi\varphi_x-\varphi\psi_x$$

とおく。すると、新たに曲面 w を $w=-(A_x+B_y)/2\ z+Az_x+Bz_y$ によって定めると、また、射影極小曲面が得られる。

以上、２変数で４階の方程式系が定める曲面について述べた。このような対象については ダルブーの著書や解説記事 [Sa3] を参照して頂きたい。

文献について：ガウスの超幾何関数はやはり [Gauss] が一番。アペルの超幾何関数と直交多項式については P. Appell and J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Gauthier-Villars, 1926 を始め、多数の文献がある。「予備講義」に記載の本から参照して欲しい。常微分方程式を曲線と考えることについては [Hal], [Fan], [Sea]。曲面と方程式系については [Wil], [SY1], [Sa2], [SYY], [Sa3] を挙げる。シュバルツ微分については [SY2] を参照。

References

[Fan] G. Fano, Über lieare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen, Math. Ann. 53(1900), 493–590.

[Gauss] C. F. Gauss, Disquitiones generales circa seriem infinita

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+etc.,$$

in Werke von C. F. Gauss III, Georg Olms Verlag, 1973, Hildesheim, New York, pp. 123–162, 207–229.

[Hal] G. H. Halphen, Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre, Acta Math. 3(1883), 325–380.

[Sea] Y. Seashi, A geometric construction of Laguerre-Forsyth's canonical forms of linear ordinary differential equations, Advanced Studies in Pure Mathematics 22(1993), 265–297.

[Sa1] T. Sasaki, Contiguity relations of Aomoto-Gel'fand hypergeometric functions and applications to Appell's system F_3 and Goursat's system ${}_3F_2$, SIAM J. Math. Anal. 22(1991), 821–846.

[Sa2] T. Sasaki, Projective surfaces defined by Appell's hypergeometric systems E_4 and E_2, Kyushu J. Math. 55(2001), 329–350.

[Sa3] T. Sasaki, Line congruence and transformation of projective surfaces, Kyushu J. Math. 60(2006), 101–243.

[SY1] T. Sasaki and M. Yoshida, Linear differential equations in two variables of rank four. I, Math. Ann. 282(1988), 69–93.

[SY2] T. Sasaki and M. Yoshida, Schwarzian derivatives and uniformization, CRM Proceedins and Lecture Notes 32(2002), 271–286.

[SYY] T. Sasaki, K. Yamaguchi and M. Yoshida, On the rigidity of differential systems modelled on Hermitian symmetric spaces and disproofs of a conjecture concerning modular interpretation of configuration spaces, Adv. St. Pure Math. 25(1997), 318–354.

[Wil] E.J. Wilczynski, Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Teubner 1906; reprinted by Chelsea Publ. Co.