# 線形同次微分方程式系と射影微分幾何

神戸大学理学部　　佐々木 武

## 0.1　はじめに

幾つかの例によって、射影微分幾何の起こりと線形同次微分方程式系との関わりについて述べる。

超幾何関数 ${}_qF_p$ の定義から始める。${}_qF_p$ は、略記号 $(a,n)=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ を用いて、巾級数

$$ {}_qF_p(a_1,\cdots,a_q;b_1,\cdots,b_p;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,n)\cdots(a_q,n)}{(b_1,n)\cdots(b_p,n)}\frac{x^n}{n!} $$

で定義され、微分方程式

$$ ({}_qE_p) \qquad \theta(\theta+b_1-1)\cdots(\theta+b_p-1)z-x(\theta+a_1)\cdots(\theta+a_q)z=0 $$

の解となっている。$\theta$ は $x\partial/\partial x$ を表す。今、$q>p$ とし、この方程式の $q$ 個の独立な解を $z^1$, $\cdots$, $z^q$ として、それらの比を取る写像

$$ x \longrightarrow [z^1(x),\cdots,z^q(x)] $$

を考えると、これは射影空間 $\mathbf{P}^{q-1}$ の曲線を定めている。$(q,p)=(2,1)$ のときは、写像は $\mathbf{P}^1$ への写像となり、１次元射影空間のパラメトリゼーションを決めていると考えられ、$(q,p)=(3,2)$ のときは、写像は $\mathbf{P}^2$ への写像となり、２次元射影空間内の曲線（平面曲線）を与えていることになる。一般の場合に、これらの曲線がパラメータ $(a_1,\cdots,b_1,\cdots)$ にどのように因っているだろうかというのが１つの問題である。

クラウゼン（T. Clausen, 1828）の等式と呼ばれている次の関数等式がある。

$$ ({}_2F_1(a,b,a+b+1/2;x))^2={}_3F_2(2a,2b,a+b;2a+2b,a+b+1/2;x) $$

この等式は次のように解釈できる。写像

$$ x \longrightarrow [z^1,z^2]\in\mathbf{P}^1 $$

があるとき、その “テンソル積” を

$$x \longrightarrow [w^1 = (z^1)^2, w^2 = z^1 z^2, w^3 = (z^2)^2] \in \mathbf{P}^2$$

とする。この新しい写像の座標の間には、$w^1 w^3 = (w^2)^2$ という関係があるので、平面曲線と見ると２次曲線になっている。上の等式は、 方程式 $({}_3E_2)$ から作った曲線がパラメータが特別の場合には２次曲線になること、その写像が $({}_2E_1)$ から作った写像のテンソル積にたまたま一致しているということを示している。

次に、４階の常微分方程式

$$z'''' + r_1 z''' + r_2 z'' + r_3 z' + r_4 z = 0 \tag{1}$$

の幾何的意味を考えてみよう。今、２つの常微分方程式

$$x'' + p_1 x' + p_2 x = 0, \qquad y'' + q_1 y' + q_2 y = 0$$

があるとき、それぞれの解 $x$ と $y$ の積 $xy$ は４階の常微分方程式をみたし、それを２つの常微分方程式のテンソル積という。$({}_3E_2)$ について述べた性質は４階の場合には次のように述べることができる。

(G. Fano, 1900, Math. Ann.) 方程式 (1) の４つの独立な解の間に２次の関係式が成立しているとする。関係式を２次形式と考えたとき、その判別式が消えていないならば方程式 (1) は、２つの２階の常微分方程式のテンソル積となり、また、判別式が消えていれば、３階の常微分方程式に帰着される。

この結果は次のように考えるとわかりやすい。今、独立な解を $z^1$, $z^2$, $z^3$, $z^4$、独立変数を $x$ として、写像

$$z: \quad (x) \longrightarrow [z^1(x), z^2(x), z^3(x), z^4(x)] \in \mathbf{P}^3$$

を考えると、解の間の２次の関係式とは、この像が $\mathbf{P}^3$ の２次曲面に入ることであり、この曲面が退化していなければ、$\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ の $\mathbf{P}^3$ への標準的な埋め込みにほかならないから、対応する微分方程式もテンソル積に分解するということを述べている。

19 世紀の中頃から線形微分方程式はどういうときに代数関数解を持つかと

いうことに興味が持たれるようになった。H.A.Schwarz が超幾何微分方程式について、そのモノドロミーの有限条件を定めた結果（1870 年）はよく知られている。Fano 自身は、６階までの常微分方程式についての一般的回答を与ている。

では、この２次関係式が成立することは、方程式からどのように判定できるだろうか。G.H.Halphen(1883, Acta Math.) が最初と思われるが、独立変数 $x$ を取替え、未知関数 $z$ を適当なスカラー関数倍に取替えると、方程式を次の標準形になおすことができる。

$$z'''' + 4r_3(x)z' + r_4(x)z = 0.$$

このなおし方には $x$ についての一次分数変換分の自由度があり、その変換に関して微分形式 $r_3dx^3$ と $(r_4 - 2r_3')dx^4$ は不変になることが示される。特に、２次関係式が成立することは、ある $g$ について $r_3 = g'$, $r_4 = 4c^2 - g''/5 - 36g^2/25$ （$c$ は定数）となるという条件で判定される。また、$r_3 = 0$ という条件は上記の写像のある種の退化条件であり、逆に、$r_3 \neq 0$ であれば、$\sqrt[3]{r_3}dx$ は曲線 $z$ の長さを定め、これにより $\mathbf{P}^3$ 内の曲線論が展開できる。

このように、射影空間内の曲線の幾何的性質とそれを定義する常微分方程式の関係を対象にする分野が曲線の射影微分幾何と呼ばれている。

## 0.2 $\mathbf{P}^3$ 内の曲面論 (1)

それでは、$\mathbf{P}^3$ 内の曲面と微分方程式系はどのような関係にあるだろうか。これを系統的に最初に扱ったのは E.J.Wilczynski の論文とそれらをもとにした著書 [Wil] であろう。曲面を

$$z: \quad (x, y) \longrightarrow [z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), z^4(x,y)] \in \mathbf{P}^3$$

と写像で表すとき、曲面が平面的でないとすると、一般に各座標は次の形の方程式系を満す。

$$(2) \qquad z_{xx} = \ell z_{xy} + az_x + bz_y + pz, \qquad z_{yy} = mz_{xy} + cz_x + dz_y + qz.$$

このとき、微分形式 $\varphi_2 = \ell dx^2 + 2dxdy + mdy^2$ が基本的な不変量であり、曲面の共形構造を定める。この形式が非退化であれば、座標 $(x, y)$ を $\ell = 0$, $m = 0$ となるように取ることができ、さらに、$z$ に適当なスカラー関数倍をすると、標準形

$$z_{xx} = bz_y + pz, \qquad z_{yy} = cz_x + qz. \tag{3}$$

が得られる。この表示でのもう一つの基本的な不変式は Fubini-Pick の 3 次形式と呼ばれる $\varphi_3 = bdx^3 + cdy^3$ である。
(Wilczynski, 1907, Trans. AMS) 微分方程式系 (2) の解の間に 2 次の関係式が成り立つための必要十分条件は $\varphi_3 = 0$ である。

ここに述べた、2 次関係式の幾何的表現は、写像 $z$ が 2 次曲面（の一部）になるということにほかならない。

## 0.3 射影微分幾何の考え方

以上の例は、3 次元射影空間内の曲線，曲面と 2 次曲面の関係について述べたものである。一般に、射影微分幾何は射影空間内の部分多様体の射影変換について不変な性質を明らかにする幾何と定義される。リーマン部分多様体論と同じく、次のように問題を述べることができる。

- 多様体の射影空間への 2 つの埋め込み $f_1$ と $f_2$ があるとき、ある射影変換 $p$ によって、$f_2 = p \circ f_1$ となる条件を求めよ

さらには、

- 射影空間内の 2 つの部分多様体が与えられたとき、それらが射影変換で移り合うための条件を求めよ

ということが、基本的な問題となる。局所的な性質を反映する射影変換に関しての微分不変式を見つけることが重要で、この考え方は微分幾何において「同値問題」と呼ばれている。ダルブーの曲面の微分幾何についての大著である「曲面論」には、射影的考え方が様々に展開されている。中でも、ラプラス方程式

$$z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0$$

を巡っての曲面のラプラス変換や２つの曲面のペアについての幾何（線叢の幾何）など、リーマン部分多様体論にとどまらず、多様な取扱いが見られる。

## 0.4 $\mathbf{P}^{n+1}$ 内の超曲面論

３次元射影空間内の曲面の扱いを $\mathbf{P}^{n+1}$ 内の超曲面の場合に一般化することができる。これを、E. Cartan 流の動標構による方法でまとめてみよう。

$n$ 次元多様体の射影空間 $\mathbf{P}^{n+1}$ への埋め込みを同次座標を使って、写像

$$e_0 : (x^1, \cdots, x^n) \longrightarrow [z^0, z^1, \cdots, z^{n+1}]$$

により与えられているとする。接空間は mod $e_0$ で定まり、その独立なベクトルを $e_1, \cdots, e_n$ とし、これらと $e_0$ とも独立なベクトル $e_{n+1}$ を各点毎に選ぶ。そして、これらの組を縦に並べた $e = {}^t(e_0, e_1, \cdots, e_n, e_{n+1})$ を $e_0$ に付随した動標構という。ここで、同次座標の自由度を消すため、行列式 $\det(e) = 1$ となるもののみを考えることにする。取り方は無数にあるが、ひとまず１つ決める。この動標構の座標への依存は、微分方程式系

$$de = \omega\, e \tag{4}$$

で表される。$\omega$ は Maurer-Cartan 形式と呼ばれる１次微分式を成分とする行列である。その成分を $\omega_\alpha^\beta$ $(\alpha, \beta = 0, \cdots, n)$ とかく。この微分方程式系の可積分条件は $d\omega = \omega \wedge \omega$ である。以後、添字の動く範囲を $i, j = 1, \cdots, n$ や $\alpha, \beta = 0, \cdots, n+1$ 等と文字種の違いで表す。

動標構による方法というのは、この $\omega$ から、埋め込みの幾何的な量を得ようとするもので、考察の対象に合わせて標構 $e$ の取り方を制限していく必要がある。これまでに課した条件から $\omega_0^i$ $(1 \le i \le n)$ が独立であり、また、$\omega_0^{n+1} = 0$ である。以下、$\omega^i = \omega_0^i$ と書くことにする。積分可能条件 $0 = d\omega_0^{n+1} = \sum_\gamma \omega_0^\gamma \wedge \omega_\gamma^{n+1}$ から、$\omega_i^{n+1} = \sum_i h_{ij}\omega^j$ $(h_{ij} = h_{ji})$ と書けることがわかる。$\varphi_2 = \sum h_{ij}\omega^i\omega^j$ とおけば、その共形類が標構の取り方によらないことが示される。$\det(h_{ij}) \neq 0$ であるとき、曲面が非退化であるといい、以下、

これを仮定する。さらに、2 つの条件 $|\det(h_{ij})| = 1$ と $\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0$ を課すことができる。これから、$\sum h_{ij}\omega_{n+1}^j - \omega_i^0 = \sum L_{ij}\omega^i$ とすると $L_{ij} = L_{ji}$ が示される。これらの一連の操作は次のようにまとめられる。
非退化な曲面には、

$$\det(e) = 1, \quad \omega_0^{n+1} = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \quad |\det h_{ij}| = 1, \quad \mathrm{tr}_h L = 0$$

となる標構 $e$ が存在する。さらに、$\sum h_{ijk}\omega^k = dh_{ij} - \sum h_{kj}\omega_i^k - \sum h_{ik}\omega_j^k$ と置くと $h_{ijk}$ は添字について対称であり、3 次の微分形式 $\varphi_3 = \sum h_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$ の共形類は不変である。かつ、今定めた $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\sum L_{ij}\omega^i\omega^j$, $\omega_{n+1}^0$ が、最初の写像 $e_0$ の基本不変式となる。

## 0.5　超曲面に対応する線形微分方程式系

2 つの線形微分方程式系が独立変数の取替えと未知関数のスカラー関数倍で移り合うとき、それらは同値であるということにする。また、線形微分方程式系の独立な解の個数を階数とよぶ。このとき、一般に、次の図式が成り立つ。

変数の個数が $m$, 階数が $r$ の方程式系の同値類
$\leftrightarrow$　$\mathbf{P}^{r-1}$の $m$ 次元部分多様体の $PGL(r)$ についての同値類

この対応は曲線と曲面の例では既に述べた。超曲面の場合に対応する線形微分方程式系は次のようになる。未知関数を $z$, 独立変数を $(x^1, \cdots, x^n)$ とする。$x^1$ と $x^n$ を特別な座標と考えて、方程式系

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} = g_{ij}\frac{\partial^2 z}{\partial x^1 \partial x^n} + \sum_{k=1}^n A_{ij}^k \frac{\partial z}{\partial x^k} + A_{ij}^0 z, \quad (1 \le i, j \le n) \tag{5}$$

を考える。ここで、

$$g_{ij} = g_{ji},\ g_{1n} = 1,\ A_{ij}^k = A_{ji}^k,\ A_{ij}^0 = A_{ji}^0,\ A_{1n}^k = A_{1n}^0 = 0,$$

と約束すると、ある可積分条件の下に、この方程式系の独立な解の個数は $n+2$ であることがわかり、それらを並べて得られる写像が $\mathbf{P}^{n+1}$ への埋め込みを与え、超曲面を定めている。4. と比べると、$g_{ij}$ は $h_{ij}$ の関数倍であり、係

数 $A_{ij}^k$ は $h_{ijk}$ を使って、係数 $A_{ij}^0$ は $h_{ijk}$ と $L_{ij}$ を使って書くことができる。その表示式や、もっと不変的な書き方などは、講義録 [Sas] に譲る。ただ、4. のまとめやこれらの表示式は基本的に共形構造 $\varphi_2$ によっているので、 $n \geq 3$ の場合と $n = 2$ の場合とでは、表現が異なる。

方程式系 (5) の典型例に、$E(3,6)$ と呼ばれている超幾何微分方程式系がある。それの詳細な扱いは 著書 [Yos] にゆずる。

## 0.6　対称空間の射影埋め込みと線形微分方程式系

これまでの節 4 と 5 で述べたことは、２次超曲面の射影埋め込みをモデルにする幾何ということができる。すなわち、超曲面の各点でもっとも接触度の高い２次超曲面を定め (Lie quadratic hypersurface という)、それが超曲面の点にどのように拠っているかを上記の不変量を使って記述している。

２次超曲面を含む射影空間の部分多様体の典型例は、いうまでもなく対称空間の射影埋め込みであろう。それぞれの対称空間の埋め込みに対して、それをモデルとする幾何がある筈である。その一般理論は背足 [Sea] により得られた。事柄を正確に述べるには、対称空間をモデルとする部分多様体を定義しなければならないので、ここでは省略する。同値問題の観点からは、射影空間と２次超曲面以外の既約な対称空間の射影空間への埋め込みをモデルとする部分多様体は微分不変量を持たないことがわかっている [SYY]。

## 0.7　$\mathbf{P}^3$ 内の曲面論 (2)

$\mathbf{P}^3$ 内の曲面（以下、射影曲面と省略する）については、ダルブーの弟子である Tzitzeica, Demoulin, 続いて Wilczynski, Fubini, Čech, Finikov, Lane, Bol, Su, Kanitani の研究を始め、大変沢山の結果がある。多くは G. Bol による著書 [Bol] にまとめられているが、私には大変込み入っているように思える。それに比べて [Lan] はお薦めである。ここでは、幾つかのトピックを紹介する。可積分系の視点からの Ferapontov による整理 [Fer] は大変参考になると思う。

まず、方程式系 (3) の積分可能条件を書いておこう。

$$2p_y = (b\,c)_x + b\,c_x - b_{yy},$$
$$2q_x = (b\,c)_y + c\,b_y - c_{xx},$$
$$p_{yy} + (b\,q)_y + q\,b_y = q_{xx} + (c\,p)_x + p\,c_x$$

である。添字は微分を表す。

(1) 射影的展開可能曲面

$\mathbf{R}^3$ の２つの曲面について、点々対応があり、計量を保つとき、その対応を展開（または，変形）という。射影曲面については、同じ $\varphi_2, \varphi_3$ を持つ曲面を相互に射影的展開可能という。表示 (3) では、$b$ と $c$ が同一ということにほかならない。$p$ と $q$ を１つの方程式系の係数、$p+f$ と $q+g$ をもう１つの方程式系の係数とすると、積分可能条件より、$f$ は $x$ だけの関数、$g$ は $y$ だけの関数であり、関係 $2gb_y + bg_y = 2fc_x + cf_x$ が展開可能のための必要充分条件であることがわかる。これから、１つの組合わせ $(f, g)$ があれば、定数 $\lambda$ について、$(\lambda f, \lambda g)$ も当然条件を満し、また、そのような $(f, g)$ の全体は高々3次元であることが示される。Appell の超幾何方程式系 $F_4$ はそのような例の一つである。

(2) 射影極小曲面

$bc \neq 0$ と仮定する。このとき、 $bcdxdy$ は表示によらない曲面の面積要素である。それから通常のようにして面積汎関数が得られるが、この汎関数についての停留曲面を射影極小曲面という。アフィン球面が典型的な射影的極小曲面である。

$L = -b_y - 2p$, $M = -c_x - 2q$ と略記すると、射影極小曲面は方程式

$$b_{yyy} + 2b_y M + bM_y = 0, \qquad c_{xxx} + 2c_x L + cL_x = 0$$

で特徴づけられる。一見複雑な非線形方程式系であるが、次のような対称性を持っている。$L$ と $M$ を用いると、方程式 (3) は

$$z_{xx} = bz_y - (L + b_y)z/2, \qquad z_{yy} = cz_x - (M + c_x)z/2$$

と表される。すると、勝手なパラメータ $\lambda$ について、方程式系

$$\varphi_{xx} = \lambda b\varphi_y - (L + \lambda b_y)\varphi/2, \qquad \varphi_{yy} = (c/\lambda)\varphi_x - (M + c_x/\lambda)\varphi/2$$

も可積分である。今、$\varphi$ と $\psi$ を このあとの方程式の独立な解とし、

$$\mu = (\lambda+1)(\psi_x\varphi_y - \varphi_x\psi_y) + (\lambda-1)(\psi\varphi_{xy} - \varphi\psi_{xy}),$$

$$A = -\lambda(\psi\varphi_y - \varphi\psi_y), \quad B = \psi\varphi_x - \varphi\psi_x$$

とおく。射影極小曲面 $z$ に対して、新しい写像 $w$ を

$$w = \mu z + 2Az_x + 2Bz_y$$

によって定めると、写像 $w$ も射影極小曲面となっている (F.Marcus, 1980)。なお、$w$ は曲面 $z$ の接平面上にあり、逆に、$z$ を $w$ で表す表示式を求めてみると、$z$ は曲面 $w$ の接平面上にあることがわかる。このような対応 $z \mapsto w$ は $z$ と $w$ を焦曲面とする線叢 (line congruence) といわれ、射影微分幾何の重要な研究対象となっている。

射影極小曲面の族は幾何的性質から決まるいくつかの部分族を持ち、広い曲面のクラスであるが、可積分条件の方程式を可積分系と見てその構造を調べることは面白いことと思われる。

(3) Demoulin 変換

さて、4. に述べた動標構の構成を思い出そう。最後のベクトル $e_{n+1}$ はリーマン幾何に対比すれば、法線ベクトルと呼ぶべきものである。従って、各点に $e_{n+1}$ を対応させる写像は射影的な Gauss 写像と呼ぶことができる。しかし、4. に述べた標構の取り方だけでは、この $e_{n+1}$ は一意的には決まらない。この不定性が $n = 2$ に限っても、射影曲面の幾何を難しくし、また、興味を削いできたものと思う。ところで、Demoulin はこの不定性を除くために、$bc \neq 0$ であれば、$\omega_3^0 = 0$ とできることを示した。ただし、一般にその選び方は4通りあり、その各々に対してベクトル $e_3$ の定める埋め込みを元の曲面の Demoulin 変換という。特に、この4つが一致するとき、元の曲面を Demoulin 曲面といい、射影極小曲面になっていることが証明できる。Demoulin 曲面の族は上記 (2) に述べた構成に関して閉じている。さらに

(Mayer 1932, Bull. Sci. Math.; Finikov, 1930, Mat. Sbornik) 元の曲面が射影極小曲面であれば、その Demoulin 変換も射影極小である。

この逆はそのままでは成立しないが、特別な場合を除いて正しい。Demoulin 変換を 2 回続けるとどうなるかについては次の結果が知られている。

(Su[蘇], 1957, Acta Math. Sinica) 射影極小曲面に 2 回の Demoulin 変換を行なって得られる 16 個の曲面のうち、4 個は元の曲面に一致し、互いに一致する 2 個の組合わせが 4 つある。結局、一般的に 8 個の新しい射影極小曲面が得られる。

## 0.8 いくつかの問題

上記に話題に関係して、いずれも具体的ではないが、次のような問題をまとめて、今後の研究に供したい。

(1) 線叢の幾何の古典的結果を整理し、曲面を同種の曲面に変換する方法を得ること。

(2) 高次元のラプラス変換の一般論（例えば、N. Kamran and K. Tenenblat, 1996, Duke Math. J.）を発展させ、部分多様体の変換理論を得ること。

(3) 高次元の射影極小超曲面の構成、それらの超曲面に記述する微分方程式系の対称性を調べること。

(4) 対称空間の射影埋め込み関わる線形微分方程式系の不変式（シュバルツ微分）を、それぞれの場合に具体的に記述すること。

## 参考文献

[Bol] G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie*, Vanderhoeck and Rüprecht, vol.1 1950, vol. 2 1954, vol. 3 1967.

[FC1] G. Fubini and E. Čeck, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surface*, Gauthier-Villars & Cie, 1931.

[FC2] G. Fubini and E. Čeck, *Geometria proiettiva differenziale*, Zanichelli, vol.1 1926, vol.2 1927.

[Fer] E.V. Ferapontov, Integrable systems in projective differential geometry, Kyushu J. Math. **54**(2000), 183–215.

[Lan] E. P. Lane, *A treatise on projective differential geometry*, Univ. Chicago Press, 1942.

[Sas] T. Sasaki, *Projective Differential Geometry and Linear Homogeneous Differential Equations*, Rokko Lectures in Math **5**(1999), Dept. of Math., Kobe Univ.

[Sea] Y. Se-ashi, On differential invariants of integrable finite type linear differential equations, Hokkaido Math. J. **17**(1988), 151–195.

[SYY] T. Sasaki, K. Yamaguchi, and M. Yoshida, On the rigidity of differential systems modelled on hermitian symmetric spaces and disproofs of a conjecture concerning modular interpretations of configuration spaces, Advanced Studies in Pure Math. **25**(1997), 315–354.

[Wil] E. J. Wilczynski, *Projective Differential Geometry and Curves and Ruled Surfaces*, Teubner 1906; reprinted by Chelsea Publ. Co.

[Yos] M. Yoshida, *Hypergeometric Functions, My Love,* Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1997.