[名著発掘　　数学のたのしみ No.9, 10/1999, 133–141 所載] を一部修正して転載

G. Darboux　Théorie Générale des Surfaces

1. ダルブーの曲面論講義

古典微分幾何学への新たな興味が生まれている。可積分系の幾何的モデルの宝庫と思われるからである。

ここに紹介するダルブーによる本の正式名は「曲面の一般理論と無限小解析の幾何的応用」であるが、通常 ダルブーの『曲面論』と呼ばれる。1882 年から 1885 年にかけてソルボンヌで行った講義の記録である。４巻からなり、第１版は I: 1888 年, II: 1889 年, III: 1894 年, IV: 1896 年 と出版に１５年かかっている。I と II は、それぞれ 1914 年、1915 年に第２版が出て、現在の普及版は Chelsea より手にはいる。

著者は序文で "偏微分方程式論の新しい応用を与えることを目的にした" といい、偏微分方程式を解くこととはどういうことか、可積分性とはの議論が随所に散りばめられている。読者の趣味によっては、偏微分方程式論を幾何学–曲面論を題材に述べたものと考えることができる。

この本は全部で約 ２３００ページ。これを２９１ページにまとめた冊子がある。筆者の名古屋時代の恩師である森本明彦名大名誉教授の手になるもので、1984 年に筑波大学で行われた Surveys in Geometry の予稿である。[1] 私はこの冊子を参考にしながら、２年程前から、ところどころ読み始めて、"古典微分幾何学" の面白さにひかれるようになった。

その理由の一つは射影微分幾何にある。この本はある意味で射影微分幾何の走りといえるだろう。例えば、あとから述べる Laplace 方程式及び線叢の理論は射影空間内の曲面の射影変換に関して不変な性質を明かにしようとしていると考えられる。また、２つの曲面の間の対応、曲面の変換理論、は射影的な性質を取り上げているものが少なくない。

内容にはいる前に識者の評価を記してみよう。ブラシュケ (W. Blaschke) はどう言っているだろうか。ブラシュケは大域微分幾何の創始者として有名であるが、彼も３巻の大著 "Differential Geometrie" を著わしている。その第１巻 (1930 年, 第３版) で、次ぎのように述べている：

Dieses Werk von Darboux, das 4 Bände umfaß, ist noch heute als eines der schönsten und reichhaltigsten Werke über Differentialgeometrie anzusehen.

ダルブーは 1842 年に、フランスの Nîmes で生まれ、１８才でパリに出、５７才に生涯を終えるまでそこで暮らした。最初はエコールポリテクニクの学生として、次いでエコールノルマルに進んだ。1880 年に シャール (Chales) の後任としてソルボンヌの幾何の教授となり、1900 年には、ベルトラン (Bertrand) の跡をついで、科学アカデミーの終身の書記 (Secrétaire perpétuel) に選出されている。

Seine besondere Lehrbefähigung machte Darboux zum Vater einer ausgedehnten geometrischen Schule in Frankreich.
とは、Blaschke の評価である。

Spivak の “A comprehensive study of differential geometry” を知っている読者も少なくないと思う。曲線の長さ、曲面の面積、曲面上の微積分などをやさしくとき明かし、歴史に遡って 曲線論、曲面論を展開した５巻からなる講義録である。その第５巻に、過去の様々の幾何や解析の本を解説付きで参考文献にあげていて、面白い。『曲面論』についてはたった３行であるが、

The great classic. Always referred to in hushed tones of awe. Unreadable, but in this new printing by Chelsea, at just $60 for 2200 pages, how can you resist?

私も、この安さに釣られて買った。“unreadable” というならば、簡単に「読む」方法はないだろうか。私は、文献 [2] の第 10 章を勧める。タイトルは “A brief guide to the local theory of surfaces in $\mathbf{R}^3$” わずか 57 ページで古典微分幾何学の雰囲気が味わえる。

2. Jean Gaston Darboux

ダルブーの追悼記事が筆者の調べた限り、３つある。ヒルベルト (D. Hilbert), アイゼンハート (L.P. Eisenhart), 及びフォス (A. Voss) である。ヒルベルトは「ダルブーはポワンカレに勝るとも劣らず、生き生きとしたフランスの数学にとって輝かしい跡を残してきた。それは、単に数学上の豊かな成果にとどまらず、際だった組織力、教育者としての力量、及び彼の個性においてそうであった。」と書き始めている。

この記事に対して、リード (C. Lied) が面白いことを書いている。時は、1917 年。アメリカがドイツに参戦した年に没した。ヒルベルトが Göttinger Nachrichten に記事を投稿すると、(Hilbert 全集 III 巻、365–369.) 「敵性数学者」への追悼であると学生が激昂し取消をもとめた。ヒルベルトは拒否し、逆に、学生達に謝罪文を書かせることを学長に要求した。要求が容れられなければ辞職すると言って。結局、この文は残っている。

ヒルベルトの記事はフランス語訳が Acta Math. 42(1920), 269–273 にある。アイゼンハートの記事は Bull. AMS 24(1918), 227–237 及びそのドイツ語訳が Acta Math. 42(1920), 275–284 にある。フォスのものは Jahrbuch d. Kgl. bay. Ak. d. Wiss, 1917, 26–53 及び再掲が Jahresber. d. Deut. Math. Ver. 27(1918), 196–217 にある。３人の記事がいずれも、重複して残っていることにはびっくりする。

Hilbert の記事をもう少し借りよう。曰く：

> ダルブーを幾何学者とみなすのは不十分である。２階の偏微分方程式論、ダルブー和、 フーリエ級数、５球座標の導入、後に O. Zoll, P. Funk の学位論文の出発点となったすべての測地線が閉じている曲面の研究など、幾何学者であると同時に解析学者であった。彼の仕事のもっとも主要な部分は曲面論であり、曲面論に現れる解析的な方法、偏微分方程式論、変分法、不変量の理論を深く洞察し、明解に取り上げた数学者は始めてである。

さらに、

『曲面論』はジョルダン (C. Jordan) の Cours d’Analyse、ピカール (Picard) の Traité d’Analyse, ポワンカレの Mécanique céleste と並んで数学者の書棚の必携品である。

と。フォスは「ダルブーの弟子に、 Guichard, Tzizeica, Demoulin, Koenigs など。単に数学的成果を発見をすることだけに満足せず、弟子を作ることを旨とした」と述べている。

さて、これらの追悼記事を読むと、ダルブーの仕事について避けて通れないものに曲面の３重直交系の理論がある。ユークリッド空間内に曲面の１パラメータ族を３系ほどつくり、各々の系から１つづつ曲面を取り出すと、交線において互いに直交しているものを対象とする。その詳しい理論はダルブーにより

Leçns sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, pp. 338, 1898; 第２版 pp. 567, 1910

にまとめられている。森本先生は “偏微分方程式論と微分幾何学との見事な融合の中で解決されるに至る道程” に “多大な興奮と感動” を覚えると、氏の素晴らしい解説 (数学セミナー xxx 年 yy–zz 号) において述べられている。この理論については、この解説を参照頂きたい。

3. 歴史

微分幾何学は、Euler, Monge, Dupin, Frenet, Serret 等により 18 世紀から 19 世紀の初めにかけて、3 次元空間内の曲線と曲面の研究から始まった。内的な幾何構造の概念はガウス (1827 年) による。Gauss-Bonnet の公式は局所的な曲率の概念を始めて大域的な性質に結びつけたものである。近代微分幾何学はリーマンによって始まったといってよいだろう。

『曲面論』は古典微分幾何学の集大成であるが、その中で組織的に用いられた動標構の方法は、Ricci のテンソル解析、Levi-Civita の平行性の概念の発見を経て、カルタン (E. Cartan) の接続の概念の定式化につながった。

ダルブーの講義の背景を知る上で有益と思い、簡単な年表を参照頂きたい。

年表

1760	L. Euler	曲面の主曲率、Euler の公式
1760	J. L. Lagrange	極小曲面の方程式
1784	G. Monge	曲率線、曲率半径の定義
1784	A. M. Legendre	Legendre 変換
1813	P. C. F. Dupin	共役方向の概念、Dupin の定理
1826	A. L. Cauchy	空間曲線の主法線、曲面の接平面の定義
1827	C. F. Gauss	球面表示、全曲率、Gauss の定理、測地三角形の Gauss の定理
1836	C.G.J.Jacobi	Jacobi 場、共役点
1847	J. F. Serret	空間曲線の Frenet-Serret の公式
1848	O. Bonnet	一般の Gauss-Bonnet の定理
1854	B. Riemann	幾何学の基礎にある仮説について – Riemann 幾何の始まり
1867	Bonnet	Gauss-Codazzi-Mainardi の方程式による曲面の基本定理の証明
1866	Darboux	学位論文: 直交三重系について
1872	F. Klein	エルランゲンの目録 – 幾何学の比較的群論的考察
1898	J. S. Hadamard	完備単連結負曲率曲面の位相型
1899	D. Hilbert	完備負曲率曲面の埋め込み不能定理

4. Darboux 変換

最近、Darboux 変換という用語によく出会うようになった。ダルブーによるわかりやすい例があるので、紹介しよう。

１変数の関数 $\psi(x)$ に関する固有値問題

$$-\psi_{xx} + u(x)\psi = \lambda\psi$$

を考える。いま、λ の特別の値 λ_0 を固定し、$s = s(x, \lambda_0)$ をある解とする。

$$\sigma = s_x/s, \quad u^D = u - 2\sigma_x$$

とおくと、どんな解 ψ についても

(1) $$\psi^D = \psi_x - \sigma\psi$$

は別の方程式

$$-\psi_{xx} + u^D\psi = \lambda\psi$$

の解であることが容易に確かめられる。対応 $\psi \mapsto \psi^D$ を この場合の Darboux 変換という。

具体例として、$u = x^2$, $s = \exp(x^2/2)$ ($\lambda_0 = -1$) とすると、$\psi^D(x,\lambda) = \psi(x,\lambda+2)$ がすぐわかり、Darboux 変換はパラメータ λ の平行移動として実現される。特に、$\psi(x,1) = \exp(-x^2/2)$ のとき、$\psi(x,2n+1) = -H_n(x)\psi(x,1)$ とかかれ、H_n はエルミート多項式である。

式 (1) は、後に見る 2 変数の Laplace 変換の類似であることに注意しておこう。

さて、最近 アメリカ数学会のレビュー誌 Mathematical Review が MathSciNetwork 上にのり、非常に検索しやすくなっている。論文のタイトルに Darboux というキーワードがどれくらい出てくるか、遊び心で調べてみた。ついでに Bäcklund も。タイトル数の結果は次ぎの通り。

	Darboux	Bäcklund
1940-44	89	40
45-49	99	41
50-54	98	42
55-59	113	43
60-64	127	41
65-69	142	40
70-74	142	46
75-79	173	98
80-84	197	204
85-89	269	254
90-94	265	179
95-	283	135

Darboux と Bäcklund 両方を含むものは全期間を通じて 22 であった。Bäcklund も増えているが、それにもまして Darboux が増えているではないか? どうやら、物理学者が、そしてもちろん数学者もダルブーの古典微分幾何学、特に曲面の間の対応に興味を持ち始めたからと推察する。

もともと、曲面の Darboux 変換は次のことを云うらしい。$\mathbf{R}^3$ 内の球面の 2 次元族 (球面叢という) が与えられると、その包絡面が (一般に) 2 つでき、その間に点点対応ができる。この対応によって各々の曲率線が対応するとき、これを Ribaucour congruence という。さらに、その対応が (誘導計量について) 共形的であるとき、それを 1 つの包絡面から他の包絡面への Darboux 変換と呼んだ。このとき、両曲面とも等温曲面 (isothermic surface) であり、Darboux 変換は等温曲面を定める非線形微分方程式系の解の間の対応といえる。

現在は、これがもっと一般化されて、非線形可積分偏微分方程式系の解を構成する方法として理解されている。

実は、この曲面の対応＝変換が『曲面論』の全巻を通じての基本的トーンであることを強調したい。

このように考えると、 sine-Gordon 方程式の Bäcklund 変換に触れないわけには行かないだろう。これも復習のつもりで簡単に述べる。

負定曲率 -1 の曲面の計量は漸近座標 (x, y) に関して

$$ds^2 = dx^2 + 2\cos\theta dxdy + dy^2$$

と表される。 θ は２つの座標曲線のなす角度であり、次の sine-Gordon 方程式をみたす。

$$\theta_{xy} = \sin\theta. \tag{2}$$

そこで、θ を既知として τ についての方程式系

$$\begin{aligned}
\tau_x &= \theta_x - \alpha \sin\left(\frac{\theta + \tau}{2}\right), \\
\tau_y &= -\theta_y + \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{\theta - \tau}{2}\right).
\end{aligned}$$

を考えよう。α はパラメータ定数である。この系の可積分条件が (2) であることに、気がつくことから、物語が始まる。それを認めると、方程式形の対称性より、 θ が (2) の解であれば、τ も勝手な初期値に対して (2) の解になっていることが分かる。これを幾何的にいうと、与えられた負定曲率曲面から、新しい負定曲率曲面 (のシリーズ) を作る方法を与えている。この操作を もともとの Bianchi 変換、それを線叢の焦曲面の間の変換として幾何学的に実現したものを Bäcklund 変換と呼ぶ。

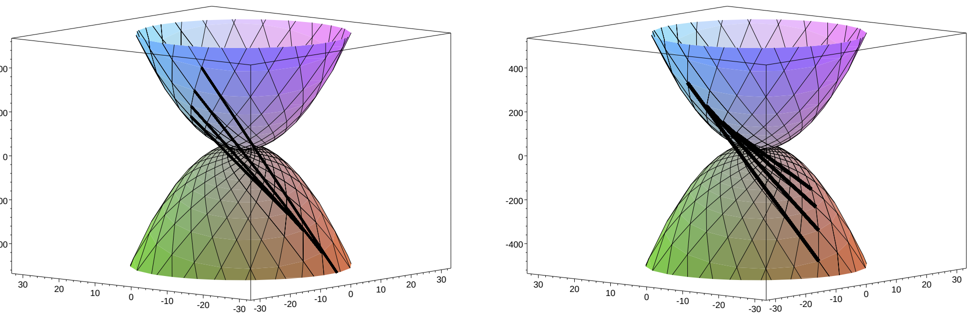
一般に、線形系の可積分条件として得られる (非線形) 方程式系は soliton 方程式といわれるが、この意味で、上の例は soliton 方程式である。soliton 方程式の対称性を調べることが重要であり、上の解の間の変換は (2) の対称性を記述している。

5. 線叢・Laplace 方程式

直線の２次元の族を線叢という。例えば、曲面の法線全体は曲面上の点をパラメータとする線叢である。線叢の研究はクンマー (E. Kummer; 1860) に始まるといわれている。プリュッカー (Plücker) は 1865 年に、直線からなる空間について最初の論文を書いている。

線叢は、２つのパラメータ (u, v) に対して、点 $z(u, v)$ と 方向 $\xi(u, v)$ によって直線 $x(u, v) + t\xi(u, v)$ を定めることによって与えられる。t は直線のパラメータである。線叢の基本的不変量は２つの微分形式 $\langle d\xi, d\xi\rangle$ と $\langle dx, d\xi\rangle$ である。

２次元のパラメータ空間内に曲線を描くと、１次元の直線の集まり、すなわち線織面ができる。この線織面が可展面になるような曲線が各点を通り２系列できる。この可展面の反帰曲線の全体は一般に１つの曲面を作り、都合２つの曲面が決まる。これを、焦曲面といい、その概念図は 図 1 を参照。各直線は焦曲面に接している。



次に、３次元射影空間内の曲面を埋め込み写像 $z(x,y)$ で与えよう。座標 (x,y) を 共役座標に取ると z は

$$z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0 \tag{3}$$

という形の方程式を満たすことが知られる。いまは、この形の方程式が成り立つような座標を共役座標の定義と思ってもよい。この形の方程式は Laplace 方程式と呼ばれている。さて、y 方向の接線の全体は１つの線叢をつくる。この線叢の１つの焦曲面は z そのものであるが、では、もう１つはどこにあるだろうか。定義に戻って考えると

$$z^1 = z_y + az \tag{4}$$

がそうなっている。一般に z^1 は曲面を定め、(4) で与えられる変換を方程式 (3) に付随した Laplace 変換という。また、x 方向に同様の議論をして

$$z^{-1} = z_x + bz$$

と定義する。簡単な計算により $z^{\pm 1}$ も z と同じく (3) の形の方程式をみたすことがわかり、一般に $(z^1)^{-1}$, $(z^{-1})^1$ と z は (射影空間内で) 同じ曲面を定めることがチェックできる。したがって、帰納的に $z^m = (z^{m\pm 1})^{\mp 1}$ と曲面の列、Laplace 列、を定義できる。

Laplace 列が二重周期的になるとき、それらは微分方程式

$$\theta_{xy} = 4\sinh\theta$$

によって記述されるという事実は面白いのではないだろうか。

このような、線叢と Laplace 方程式の変換の話が 第２巻の題材である。Laplace 方程式は 『曲面論』の全巻に現れ、彼の幾何学的考察に欠かせないものである。

応用例を挙げておこう。p, q, r を定数として、

$$z_{xy} - \frac{p}{x-y}z_x - \frac{q}{y-x}z_y - \frac{r}{(x-y)^2}z = 0$$

は Euler-Darboux-Poisson 方程式と呼ばれ、特殊関数の研究で重要である。

２つの主曲率の間に関数関係のある曲面を Weingarten 曲面という。回転面、平均曲率一定曲面、極小曲面などを含む。この曲面は法線叢の焦曲面が回転面に展開可能という幾何的性質によって特徴付けられ、また法線叢による２つの焦曲面の対応が互いの漸近曲線を保つという線叢 (Weingarten 線叢) としても特徴付けられる。

6. 動標構

動標構の方法はセレー、フレネーに始まり、『曲面論』において 曲線、曲面の記述に系統的に使われた。その後、Demoulin, Cotton(1905) により標構の属する群の一般化がおこなわれ、カルタンにいたって、幾何における日常用語となった。カルタンは微分形式の方法と共にこれを駆使している。筆者は動標構の方法を幾何的直観にすぐれた大変便利なものと考えているが、その用法にはまらないと何をしているのか分からず、「あの動標構の方法」は敬遠しようという雰囲気も未だに (または、接続の概念が明確になった今だからこそ) ある。

動標構の考え方の基本は Frenet 標構にあるので空間曲線の記述を振り返っておく。

空間曲線をベクトルを使って $p(s) \in \mathbf{R}^3$ と表す。

$$e_1(s) = dp(s)/ds$$

が接ベクトル。曲線のパラメータ s は長さのパラメータ、すなわち、$\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ となっているとする。$\kappa(s) = ||de_1/ds||$ が 曲率。$\kappa \neq 0$ のとき、

$$e_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{de_1}{ds}$$

とおく。e_1 に直交する単位ベクトルである。さらに、

$$e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s)$$

とすると、互いに直交するベクトルの組 $\{e_1, e_2, e_3\}$ ができる。これを Frenet 標構 (Frenet frame) という。

$$e = {}^t(e_1, e_2, e_3)$$

をベクトルを成分とする縦ベクトルとすれば、空間曲線の基本方程式は

$$\frac{de}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} e$$

である。ここで、τ は捩率。

空間曲線の各点に 標構 e を対応させているわけであるが、それは、空間 $\mathbf{R}^3$ の各点に, ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の単位直交基底の全体を付与した大きな空間、すなわち frame bundle, の切断を曲線に沿って取ったものに他ならない。どのような標構を取ると、対象となる図形の幾何的性質をよく表すかを考えるためには、背景にある運動群に注目する必要がある。今の場合は、ユークリッド運動群であり、標構 e の無限小運動は直交群のリー環に値を取っている。一般に、考え得る標構を構造群の性質を使って特殊化して行くことによって、対象とする図形の幾何的量を取り出す方法が動標構の方法と言える。

この動標構の方法は、『曲面論』の 第１編に特に詳しい。

7. 曲面の変形

２つの曲面の間に写像があり長さを変えないとき、すなわち第１基本形式を保つ写像があるとき、互いに写像可能 (applicable) という。対応する点で全曲率が等しいのは当然であるが、それだけでは一般に足りない。そこで、1) 写像可能性の判定をする条件をもとめること、2) 互いに写像可能な曲面がユークリッド運動で重ね合わせることが出来るための条件をもとめること、(これを剛性の問題 (rigidity) という)、3) 与えられた曲面に写像可能な曲面全体をもとめること、(これを変形の問題 (deformation) という)、が 19 世紀数学の 1 つの重要な研究テーマとなった。

『曲面論』の III 巻はこの問題にあてられている。また、IV 巻は無限小変形に当てられている。現在も大変重要な問題である。カルタンの一般化に興味のある方は、Cartan 全集の番号 [55] の論文を参照されたい。

有名な具体例を挙げる。t をパラメータ、u と v を座標とする曲面の族

$$\begin{aligned} x &= \sinh u \cos v \cos t - \cosh u \sin v \sin t, \\ y &= \sinh u \sin v \cos t + \cosh u \cos v \sin t, \\ z &= v \cos t + u \sin t \end{aligned}$$

を考えよう。どんな曲面の族になっているだろうか。$t = 0$ のとき、$U = \sinh u$, $V = v$ とすると

$$x = U \cos V, \quad y = U \sin V, \quad z = V$$

は常螺旋面 (right helicoid) であり、$t = \pi/2$ のとき、座標を消去してみると

$$x^2 + y^2 = (\cosh z)^2$$

だから、これは懸垂面 (catenoid) をあらわす。では、それぞれの曲面の計量 ds^2 はどうなっているか。簡単な計算より、

$$ds^2 = (\cosh u)^2 (du^2 + dv^2).$$

すなわち、パラメータ t によらない。したがって、常螺旋面と懸垂面を繋ぐ変形が得られた。

一般に、すべての極小曲面は極小曲面という性質を失わずに連続的に展開的変形が可能であることが知られており、ボンネによる Weierstrass の積分表示を使った標準的な変形の構成方法がある。日本語の本では、窪田忠彦著、佐々木重夫編、「微分幾何学」、岩波全書 (第１刷 1957) が参考になるだろう。

もう１つ例を挙げる。ボンネ (1867) は主曲率を変えない曲面の変形を研究した。変形のどの２つもユークリッド運動では移り合わないとする。ボンネ自身は 平均曲率一定な曲面は変形を持つことを示している。チャーン (S.S.Chern; 1985) は、そのような変形は平均曲率が一定の族か、そうでないときは計量を

$(\mathrm{grad}H)^2/(H^2-K)$ 倍すると曲率 -1 の計量になることを示した。(H は平均曲率、K はガウス曲率。)

この性質を持つ曲面を含むクラスに等温曲面と呼ばれるものがある。それは (局所的に) 良い座標 (u,v) を取ると、計量が $e^{2\theta}(du^2+dv^2)$ となり、かつ、第 2 基本形式が $e^{2\theta}(k_1du^2+k_2dv^2)$ という特殊な形を取り得る曲面として定義される。k_1, k_2 は主曲率を表す。2 次曲面、cyclides(『曲面論』の §437), 回転面、曲率線が平面的な曲面、平均曲率一定な曲面などは等温曲面である。

ダルブーは、等温曲面の埋め込み写像を $z(u,v)$、法線ベクトルを $\xi(u,v)$ とするとき、新しい埋め込み $z^D(u,v) := z + Az_u + Bz_v + C\xi$ がまた等温曲面になるように 係数 A, B, C を定める方法を見つけた。これらは、曲面のデータから得られる線形方程式系の解として与えられる。このことは θ, k_1, k_2 のみたす非線形方程式系の解の間にある種の変換が存在することを示している。

この変形の問題は大域的に考えるか局所的に考えるかによって性格が異なることを注意しおきたい。例えば、2 つの卵形面が互いに等長であれば、それらは合同である、という Cohn-Vossen の剛性定理は大域的である。

ダルブーの方程式

第 3 巻 第 7 編では、(x,y) を座標とする曲面上に計量 $ds^2 = Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2$ が与えられたとき、この計量を実現する埋め込み $f:(x,y)\to\mathbf{R}^3$ を見出すことを問題としている。変形の問題に関係が深いので、少し触れておきたい。

これは第 2 基本形式の候補をみつけて、Gauss, Codazzi, Mainardi の微分方程式を満たすように f を決めることである。第 2 基本形式があったとして、微分方程式の可積分条件を求めることが 1 つの方法であるが、ダルブーは別の考え方を採用した。

埋め込みを成分を使って $f=(u,v,w)$ とすると

$$du^2+dv^2+dw^2 = ds^2$$

が解くべき方程式である。いま、$(x,y) = (0,0)$ の近傍で考えることとし、$w_x(0,0) = w_y(0,0) = 0$ かつ写像 $(x,y)\to(u,v)$ は非退化とする。(して構わない。) このとき、曲面上の計量 $du^2+dv^2 = ds^2-dw^2$ は平坦である。右辺の計量の曲率を計算して w を未知関数とした微分方程式を書き下すことができる。(1872, Darboux)

$$(EG-F^2)(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2)+Aw_{xx}+Bw_{xy}+Cw_{yy}+D=0$$

で、A, B, C, D は w_x, w_y, w の高々 2 次の多項式。これを Darboux の方程式と言う。$E=G=0$, $F=2\lambda^2$ のときは、簡単になって

$$\left(r-2p\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\left(t-2q\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)-s^2-4(\lambda^2-pq)\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial x\partial y}=0$$

(Bour の式). この方程式については様々な研究が行われて来た。この方程式が 楕円型であるか、双曲型であるかは、計量 ds^2 の曲率が 正か負かによることは大事な注意点であることを述べ、詳細は『曲面論』及び専門書にゆずる。

8. 閑話休題

微分幾何の古典

数学書には分厚いものが少なくない。微分幾何ではこのダルブーの曲面論と、先に言及した Spivak の講義録の他に、気の付く古典に Luigi Bianchi と W. Blachke の本がある。前者は "Lezioni di geometria differenziale" というタイトルで ３巻、本文 1467 頁。第２版が 1902–1909 年。３巻の副題は Teoria delle Trasformazioni delle Superficie applicabili sulle quadriche。後者については先に触れた。

１９世紀の数学雑誌

数学の雑誌に、クレレの雑誌とか、リュービユの雑誌とか個人名で呼ばれる由緒のある雑誌がいくつかある。ダルブーの生い立ちを見ていると、彼の生地 Nîmes でジェルゴンヌ (J.D. Gergonne, 1771–1859) の雑誌と名の付くフランスの最初の数学雑誌が出ている：Annales des mathématiques pures et appliquées がそれで、1810 年から 1831 年まで出版された。

クレレ (1780–1855) の雑誌が Journal für reine und angewandte Mathematik と云い、 1826 年創刊。また、リュービユの雑誌が Journal de mathématiques pures et appliquées と云い, 1836 年創刊。いずれにしても、純粋と応用とを標榜するのはこの時代から始まっていたようだ。ちなみに、イタリアには "Annali di Matematica pura ed applicata"(1850 年創刊) がある。

ダルブー自身は 1870 年に J. Houël、 J. Tannery と共に "Bulletin des Sciences mathématiques" を創刊している。

あと、参考に挙げると、L. Pasteur 創刊になる "Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure" が 1864 年。A. Clebsch と C. Neumann による "Mathematische Annalen" は 1868 年。G. Mittag-Leffler による "Acta Mathematica" が 1882 年である。

9. 各編解説

８編の内容をキーワードを述べることで簡単に記す。

各々の題に続けて、キーワードを並べる。

１： 相対運動理論の幾何学への応用

曲線と曲面の動標構を用いた力学的な記述, リッカチ方程式の積分、非調和比、曲面の動標構、回転面・線織面・可展面、共役座標、移動曲面

２： 種々の曲線座標系

共役系、漸近曲線、Laplace 方程式、曲率線、等温座標、地図の作成、共形写像、５球座標, Dupin cyclides

３： 極小曲面

Monge, Weingarten, Schwarz 達の極小曲面の理論; 極小曲面研究の歴史、Monge-Legendre の公式、Enneper-Weierstrass の公式、極小曲面の球面表示、Bonnet の随伴曲面、代数的極小曲面の構成、Schwarz の公式、Plateau の問題 – 様々の境界を持つ極小曲面の決定、Schwarz の微分、特殊関数による極小曲面の構成

４： 叢と偏微分方程式

直線叢の理論、２階の線形微分方程式の Laplace による変換の理論、Euler-Poisson 方程式、随伴方程式、２つの不変量が等しい方程式、等温曲面への応用、法線叢、円周からなる曲線叢

５： 曲面上の曲線

曲面上の曲線、種々の曲率、測地線の方程式、測地三角形についての ガウスの定理, 変分法

６： 測地線と測地的曲率

曲面上の最短線、測地表現、測地的円周、ガウスの定理、測地曲率

７： 曲面の変形

Beltrami 微分、 等長性の判定、線織面の変形、Weingarten の曲面、負定曲率曲面、Lie・Bianchi・Bäcklund の変換

８： 無限小変形と球面表示

曲面の無限小変形、Lelieuvre の公式、極小曲面の無限小変形、球面表示と Laplace 方程式、曲率線が平面的である曲面、等温曲面、曲率線が球面曲線である曲面

10. おわりに

私は、曲面論・曲線論を学部で習わなかった世代に属する。かわりに、多様体論、リー群、de Rham の定理を講義で聞いた。その後、世代が変わって曲面論を講義に取り上げるようになったのは、具体性を求める時代の要請であろう。S^2 を 座標近傍でおおって理解するか、$\mathbf{R}^3$ の中で理解するかの違いと云える。

ドイツの本は一般的に隅から隅までしんどいというのに比べ、『曲面論』もかなりな程度、しつこい。しかし、ピカールやポワンカレの前世紀の論文が

ゆったりと書かれているというその雰囲気がこの本にもある。大きな流れがあって、それに沿いつつ、細かい寄り道をきちんとしている、といえる。

『曲面論』は数学史の世界か、という質問があるだろう。私の答えは “No” である。

また、この本はストーリーのある小説とも云える。全巻を読み通すのは自己陶酔的かも知れない。私は、IV 巻の後半は眺めただけだし、11 個のノートも見ていないことをお断りしてこの小文を終りたい。

文 献

[1] 森本明彦、Darboux の曲面論について (現代的視点から)、Reports on Global Analysis VII, R.G.A. 東大数理科学、1984.

[2] M. Berger and B. Gaustiaurx, Differential Goemetry: Manifolds, Curves, and Surfaces, Springer, 1988.

[3] F. Cajori, A History of Mathematics, 2nd ed., The Macmillan Co., 1919.

(ささき・たけし/神戸大学)