

凸領域の幾何 — アフィン微分幾何の方法

TAKESHI SASAKI

ABSTRACT. 最近、平面凸領域について次のプレプリントが出た。

Marcos Craizer, Moacyr Alvim and Ralph Teixeira, Area distances of convex plane curves and improper affine spheres, arXiv:0710.1854

平面凸領域に付随したある特性関数 f が $\det(f_{ij}) = -1$ をみたすという意外な結果なので、それに関わる事柄を解説する。目次のように凸錐の特性関数とそれに付随する距離についての Vinberg による古い結果を引用し、アフィン超球面の紹介、凸領域上の特性関数と射影不変距離、平面凸領域上の面積関数その他について順に述べる。

CONTENTS

1. 凸錐の特性関数	1
1.1. 凸錐の特性関数	1
2. アフィン超球面	2
2.1. アフィン超球面の定義	2
2.2. アフィン超球面を表す微分方程式	3
2.3. 近似解の構成	3
2.4. 筒領域上の計量	4
3. 凸領域の特性関数	5
3.1. 凸領域の特性関数と射影不変計量	5
3.2. 特性関数と微分方程式の解の関係	5
4. 平面凸領域上の面積関数	6
4.1. 平面凸領域上の面積関数	6
4.2. 面積関数のみたす微分方程式	6
5. 凸領域、凸曲線のアフィンの概念	8
5.1. アフィン曲率流	8
5.2. Affine symmetric sets	9
References	9

1. 凸錐の特性関数

1.1. 凸錐の特性関数. V を \mathbf{R}^{n+1} 内の直線を含まない凸錐 (a non-degenerate convex cone) とし、 V^* をその双対とする:

$$V^* = \text{int}\{\xi \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \langle x, \xi \rangle \geq 0 \text{ for any } x \in \mathbf{R}^{n+1}\}.$$

V の特性関数 χ_V は

$$\chi_V(x) = \int_{V^*} e^{-\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

Date: January 11, 2008.

2000 Mathematics Subject Classification. 53A15, 53A20, 53A30.

Key words and phrases. affine hypersphere, characteristic function, convex domain, convex cone, projectively invariant metric.

と定義される。 $\log \chi_V$ のヘシアン行列は正定値であり、 V 上にリーマン計量

$$\omega_V = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log V}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$$

を定める。 V は境界では発散し、計量 ω_V は完備である。 V を保つ \mathbb{R}^{n+1} のアフィン変換のなす群を $A(V)$ と記す。

Proposition 1.1. 測度 $\chi_V(x)dx$ 及び ω_V は $A(V)$ 不変である。

$V \ni x$ に対して

$$x^* = -\text{grad} \log \chi_V(x)$$

とおくと $x^* \in V^*$ であり、それは切口 $V^* \cap \{\xi \mid \langle x, \xi \rangle = n\}$ の重心に等しい。対応 $x \mapsto x^*$ は V と V^* の 1:1 対応である。

$A(V)$ の元により V の任意の 2 点に移り合うとき V を等質という。等質な凸錐については $x^{**} = x$ である。等質な凸錐は次元が高くなると非常に沢山あることが知られている。その分類は Jordan 代数の分類に還元される。

Remark 1.2. 複素空間内の複素等質有界領域を Siegel 領域として実現してその幾何を展開することが戦後盛んに進められた。Siegel 領域は凸錐とその上に働く変換群を基に作られるが、 V 上の筒領域 $T_V = V + i\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ は第 1 種 Siegel 領域と謂われ基本的である。上の χ_V は T_V 上のベルクマン核の構成に使われる。

Remark 1.3. 有界領域と聞くと、私は、S. Kobayashi, Geometry of bounded domains, Trans AMS 92(1959), 267–290 を思い出す。ベルクマン核をそれまでより広い枠組みで構成して、それから得られるベルクマン計量の完備性の条件について述べた最初の論文である。

2. アフィン超球面

2.1. アフィン超球面の定義. 特性関数 χ_V の定数面 $H_c = \{x \mid \chi_V(x) = c\}$ は V 内の凸超曲面を定める。等質な凸錐は大変いい性質を持っている:

Proposition 2.1. V が等質な凸錐であるとき H_c は等質双曲アフィン超球面である。

この意味を述べるため、アフィン微分幾何の幾つかの用語を導入する。 M^n をアフィン空間 \mathbb{R}^{n+1} 内の超曲面とする。 D を通常のアフィン共変微分とすると、 M の接ベクトル場 X, Y に対し $D_X Y$ は \mathbb{R}^{n+1} のベクトルである。仮に、 M に接していない M 上のベクトル場 ξ を勝手に定めるとき、 $\nabla_X Y$ が M に接しているという約束の下で分解

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi$$

が得られる。 ∇ は M 上の捻れのないアフィン接続を定め $h(X, Y) = h(Y, X)$ である。 h の共形類は ξ の採りかたによらない。 ξ の変化は次の $S(X)$ が M に接しているという仮定の下で得られる分解

$$D_X \xi = -S(X) + \tau(X)\xi$$

で表される。この 2 つの分解は ξ の定め方によっているので、どのように ξ を定めるかが問題になる。ユークリッド幾何では ξ を M に直交するとして議論をすると都合がいい。ここでは 2 次形式 h の符合は ξ によらないことに注意して、 h が非退化になるもののみを考える。(このとき M は非退化な超曲面という。) すると、 $\tau(X) = 0$ となる ξ が関数倍を除いて定まる。さらに、 h の定める計量の体積要素と ξ から誘導される体積要素 $\theta(X_1, \dots, X_n) := \det(X_1, \dots, X_n, \xi)$ が一致すると要請すると、 ξ は \pm 倍を除いて一意的に定まる。これをアフィン法線 (affine normal) という。 S は M の接ベクトル空間の一次変換であり、部分多様体 M の形を表しているという意味でアフィン型作用素 (affine shape operator) という。

Definition 2.2. 一次変換 S が $S = \lambda Id$ となるとき、 M をアフィン超球面 (affine hypersphere) という。

このとき λ は積分可能性より定数になることがわかり、 $\lambda = 0$ のとき放物型、 $\lambda > 0$ のとき楕円型、 $\lambda < 0$ のとき双曲型という。幾何的な意味はアフィン法線が空間のある定点を通るか ($\lambda \neq 0$)、平行であるか ($\lambda = 0$) ということである。前者を固有 (proper)、後者を非固有 (improper) という。

アフィン超球面の構成、分類はアフィン微分幾何学の中心的な問題である。

2.2. アフィン超球面を表す微分方程式. いま、 M を関数 $f(x)$ のグラフ $\{(x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n))\}$ で表すと、非退化条件は $\det(f_{ij}) \neq 0$ である。新しい変数 ξ_i と関数 $u(\xi)$ を

$$\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad u = -f + \sum_{i=1}^n x^i \xi_i$$

と定める。対応 $(f, x) \mapsto (u, \xi)$ を Legendre 変換という。このとき

Proposition 2.3. (1) M が固有なアフィン超球面 $\leftrightarrow (\lambda u)^{n+2} \det(u_{ij}) = 1$. (2) M が非固有なアフィン超球面 $\leftrightarrow \det(u_{ij}) = \pm 1$.

微分方程式 $(-u)^{n+2} \det(u_{ij}) = 1$ は Loewner-Nirenberg により最初に考察された。彼らは計量

$$-\frac{1}{u} d^2 u = -\frac{1}{u} \sum u_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

が射影不変であることを示した。実際には、どういう領域で考えるかが問題になるので、 $\lambda = -1$ としてこの方程式を \mathbb{R}^n の凸領域 Ω で

$$(2.1) \quad (-\lambda u)^{n+2} \det(u_{ij}) = 1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

として考える。解の存在は後に Cheng-Yau により示された。

以下、 ξ_i をしばしば x_i で代用する。

Example 2.4. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(1-x-y) > 0, x > 0, y > 0\}$ については、 $u = -(xy(1-x-y))^{1/3}$. この領域は射影等質であり、計量は平坦。射影一次変換により凸錐 $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ と同等であり、この錐上では測地線は $x^a y^b = c$ と表される。

Example 2.5. 円板 $\{|x|^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ では $u = -(1-|x|^2)^{1/2}$; 計量は Hilbert 計量に一致し、測地線は円板内の線分。

2.3. 近似解の構成. 方程式 (2.1) の解の構成方法については次のようなことがいえる。 $u = -\sqrt{-2w}$ とおくと

$$K(w) := (-u)^{n+2} \det(u_{ij}) = -\det \begin{pmatrix} w_{ij} & w_i \\ w_j & 2w \end{pmatrix}$$

となり (2.1) は

$$K(w) = 1 \quad \text{on } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0$$

と同値である。 Ω の定義関数 ϕ を $\Omega = \{\phi(x) < 0\}$ とし、 $w_1 = \rho\phi$ とおく。

$$K(w_1) = \rho^{n+1} K(\phi) + O(\phi)$$

であるので、 $\rho = K(\phi)^{-1/n+1}$ とすれば、 w_1 は w の近似解である。 s について帰納的に

$$w_{s+1} = w_s + g(w_s)^{s+1} \quad \text{and} \quad K(w_{s+1}) = 1 + O(\phi^{s+1})$$

により w_s を定めることは n が偶数ならば任意の s について、奇数ならば $s \leq (n+1)/2$ まで可能である。この形式解がどの程度の近似解になっているかは不明。

Remark 2.6. ここで n の偶奇が現れるのは、扱っている幾何が境界 $\partial\Omega$ の共形幾何であることによっていると思われる。実際、アフィン法線を定めるときの二次形式 h が超曲面の共形構造を定めている。超曲面を射影空間内で考える射影微分幾何の枠内でもこの構造は基本的である。

Remark 2.7. この計算の手本は強擬凸有界領域のベルクマン核と Einstein-Kähler potential の境界挙動を調べた Lee-Melrose の方法にある。

2.4. 筒領域上の計量. 方程式 (2.1) の負かつ $(u_{ij}) > 0$ となる解 u を考える。領域 Ω 上の錐 V_Ω を

$$V_\Omega = \{(tx, t) \mid x \in \Omega, t \in \mathbf{R}^+\}$$

とする。さらに、

$$v(tx, t) = -4b \log(-tu(x)) + 2b \log b; \quad b = \frac{n+1}{2(n+2)}$$

とする。

Proposition 2.8. (1) T_V 上の関数 v は

$$\det \frac{\partial^2 v}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = e^{(n+2)v}$$

をみたし ($\text{Re}z = (tx, t)$)、計量 $i\partial\bar{\partial}v$ は T_V 上の Einstein-Kähler 計量である。(2) 写像 $\Omega \ni x \mapsto (x, -1/u(x)) \in V$ は等距離埋め込みである。

Remark 2.9. 第 2 種 Siegel 領域に対して、上記の逆の手続きをすると微分方程式

$$(-u)^{n+2} \det(u_{ij}) = G(\nabla u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

が得られる。(G は第 2 種 Siegel 領域を定める 2 次形式から定まる u, u_i についての多項式。) この方程式が解を持つことを直接的に証明できるかどうかは不明。

Remark 2.10. 曲面を写像 $(x, y) \mapsto z(x, y) \in \mathbf{R}^3$ で表し、それをアフィン不変な形に書こうとすると、微分方程式系

$$z_{xx} = az_x + bz_y + cz, \quad z_{xy} = a'z_x + b'z_y + c'z, \quad z_{yy} = a''z_x + b''z_y + c''z$$

の独立な 3 つの解を並べて写像が出来ていると考えると都合がいい。解の採り方がアフィン自由度を表している。この様式では固有アフィン球面は m を定数として

$$z_{xx} = \frac{h_x}{h} z_x + \frac{m}{h} z_y, \quad z_{xy} = h z, \quad z_{yy} = \frac{1}{mh} z_x + \frac{h_y}{h} z_y$$

という表現を持つ。係数関数 h は微分方程式 (Tzitzeica 方程式とよばれる)

$$(2.2) \quad (\log h)_{xy} = h - \frac{1}{h^2}$$

によって決る。方程式 (2.1) と この方程式 (2.2) は同じ幾何的对象を表している。非固有アフィン球面の場合は方程式

$$(2.3) \quad (\log h)_{xy} = h$$

が対応するので、局所解の構成は知られている。

3. 凸領域の特性関数

3.1. 凸領域の特性関数と射影不変計量. 凸錐 V の平面による切口は凸領域になっている. 特性関数 χ_V をその切口に制限したものはどのような関数になるだろうか. 切口の1つを Ω とし、 $V = V_\Omega$ と表現できるとする. 双対錐 V^* の切口の1つ Ω^* を

$$\Omega^* = \text{int}\{\xi \in \mathbf{R}^n \mid 1 + \langle x, \xi \rangle \geq 0 \text{ for } x \in \Omega\}$$

とする. もし、 Ω が原点を含み有界であれば、 Ω^* もそうである. Ω の特性関数 χ_Ω を

$$\chi_\Omega(x) = \int_{\Omega^*} n!(1 + \langle x, \xi \rangle)^{-n-1} d\xi$$

と定める. このとき $\chi_V(tx, t) = t^{-n-1}\chi_\Omega(x)$ となっている. Ω がそもそも凸錐であるとき、 χ_Ω は凸錐としての特性関数に等しい.

T_{V_Ω} 上のベルクマン核関数を念頭において凸領域 Ω の核関数を

$$k_\Omega(x) = \int_{\Omega^*} (2n+1)!(1 + \langle x, \xi \rangle)^{-2n-2} \chi_{\Omega^*}(\xi)^{-1} d\xi$$

として定義する.

これらの関数から2つの2次微分形式

$$\tau = -\chi_\Omega^{1/n+1} d^2(\chi_\Omega^{-1/n+1}), \quad \kappa = -k_\Omega^{1/2n+2} d^2(k_\Omega^{-1/2n+2})$$

を定める.

Proposition 3.1. τ および κ は共に Ω 上の計量を定め、 Ω を不変にする射影変換はこの計量を保つ. Ω が射影変換に関して等質であれば、どちらの計量も $(-1/u)d^2u$ に等しい.

Corollary 3.2. Ω を射影等質とする. このとき、 (χ_Ω, x) の Legendre 変換を (f, ξ) とすると、グラフ $(\xi, f(\xi))$ は凸錐 V_{Ω^*} に含まれる双曲型アフィン超球面である.

領域が射影等質かどうかを判定するのは難しいので、アフィン超球面の構成手続きを与えているわけではない.

Remark 3.3. 正の整数 p に対し、 $\chi_p(x) = \int_{\Omega^*} p!(1 + \langle x, \xi \rangle)^{-p-1} d\xi$ も考えられる. これはアフィン不変である. 一般に $p > (n-1)/2$ ならば $\chi_p(x) \sim c_p d(x, \partial\Omega)^{-p+(n-1)/2}$ である.

3.2. 特性関数と微分方程式の解の関係. 前節の議論を逆にたどると、この関数は微分方程式 (2.1) の近似解となっていておかしくない. 次のことがわかっている.

Proposition 3.4. 境界 $\partial\Omega$ を滑らかとする. その上に自然に定まる射影微分幾何的に不変な3次の不変量 F (Fubini-Pick 不変量とよばれるスカラー不変量) があり、展開

$$\chi_\Omega = c_n u^{-n-1} \left(1 + \frac{5}{24(n-1)} F u^2 + O(u^3) \right)$$

が成立する. c_n は次元による定数.

Remark 3.5. 強擬凸有界領域の核関数と Proposition 2.8 の方程式の解との関係、擬共形幾何との関係については、Fefferman, Hirachi, Graham による重厚な結果がある. その Ω についての類似が $\partial\Omega$ の射影微分幾何的不変量を用いて成り立っていると思われる. 超曲面の高次の射影不変量を求める手続きが必要であるが不明.

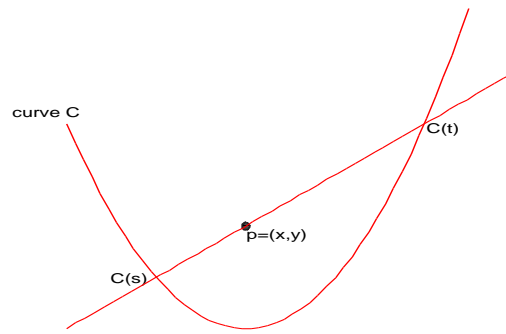


FIGURE 1

4. 平面凸領域上の面積関数

Proposition 2.3 の後の方の方程式

$$(4.1) \quad \det(u_{ij}) = \pm 1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

の解の構成は前節とはどうちがって可能であろうか。右辺が $+1$ であるときは古くからいろいろなところに現れ、 $\Omega = \mathbb{R}^n$ のときは多項式解しかないことが知られている。一般の領域では、 $n = 2$ のとき以外は殆んどわかってないように思われる。 $n = 2$ のときは、考えている共形構造はいつも複素構造から得られるので、極小曲面の Weierstrass 表示式と同様にして放物的アフィン球面の表示式が得られ、多くのことが知られている。Martínez 達の結果が面白い。

一方、 $n = 2$ でも、右辺が -1 であるときは、方程式は双曲型であり解の構成方法は知られていなかった。ここでは、Teixeira 達による積分による解の構成方法を紹介する。

4.1. 平面凸領域上の面積関数. Ω を平面凸領域、 $C = \partial\Omega$ をその境界とする。そのパラメータ表示を $C = C(s)$ とし、当面滑らかとする。平面のアフィン座標 (x, y) を 1 つ定め、 $C(s) = (c_1(s), c_2(s))$ とする。点 $p = (x, y) \in \Omega$ を通る直線 ℓ と境界との交点を $C = C(s)$ 、 $D = C(t)$ とする。(C の向きを定め $s < t$ とする。)

線分 CD と、 C と D を結ぶ境界の弧の囲む領域の面積は ℓ の関数となっているが、その最大となる ℓ を点 $p = (x, y)$ に対応させる。そのときの面積、 s の値、 t の値は (x, y) の関数である：

$$f = f(x, y), \quad s = s(x, y), \quad t = t(x, y).$$

この f を面積関数とよぶ。面積を基にしているので、 $SL(2, \mathbb{R})$ による座標変換で不変であり、ちょうど、アフィン微分幾何にマッチしている。

Remark 4.1. Teixeira 達は面積距離関数とよんでいる。アフィン微分幾何には別に次節で触れるアフィン距離関数というのがあがるが、これとは異なる。

4.2. 面積関数のみたす微分方程式. f が (4.1) をみたすことを確かめよう。まず、 p は \overline{CD} の中点になる。すなわち

$$2(x, y) = (c_1(s(x, y)) + c_1(t(x, y)), c_2(s(x, y)) + c_2(t(x, y))).$$

であるので、これを微分すると関係式

$$\begin{pmatrix} s_x & t_x \\ s_y & t_y \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} c_2'(t) & -c_2'(s) \\ -c_1'(t) & c_1'(s) \end{pmatrix}, \quad J = c_1'(s)c_2'(t) - c_1'(t)c_2'(s)$$

が得られる。一方、

$$(4.2) \quad f(x, y) = \frac{1}{2} \int_{s(x,y)}^{t(x,y)} (C(u) - (x, y)) \wedge C'(u) du$$

から

$$f_x = -c_2(s) + c_2(t), \quad f_y = c_1(s) - c_1(t)$$

が示される。便宜的に曲線上の点を $(x(u), y(u)) = (c_1(u), c_2(u))$ と別記すると、

$$f_x = -y(s) + y(t), \quad f_y = x(s) - x(t)$$

である。これから

$$f_{xx} = -\dot{y}(s)s_x + \dot{y}(t)t_x = -\frac{2}{J} (\dot{y}(t)c'_2(s) + \dot{y}(s)c'_2(t)).$$

同様に、

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{2}{J} (\dot{y}(t)c'_1(s) + \dot{y}(s)c'_1(t)), \\ f_{yx} &= \frac{2}{J} (\dot{x}(s)c'_2(t) + \dot{x}(t)c'_2(s)), \\ f_{yy} &= -\frac{2}{J} (\dot{x}(s)c'_1(t) + \dot{x}(t)c'_1(s)). \end{aligned}$$

従って、次が得られる：

Proposition 4.2. 面積関数 f は

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1/4, \quad f|_{\partial\Omega} = 0$$

をみたす。

Example 4.3. f を (s, t) の関数と考えると

$$\begin{aligned} f_s &= (y(t) - y(s))x_s + (x(s) - x(t))y_s, \\ f_t &= (y(t) - y(s))x_t + (x(s) - x(t))y_t \end{aligned}$$

である。いま、曲線 C を $(u, u^2/2)$ とすれば

$$f_s = (s - t)^2/2 = -f_t$$

となるから、 $f = (s - t)^3/6$ がわかる。凸領域は $\Omega = \{(x, y) \mid y \geq x^2/2\}$ であり、 (x, y) 座標では $f = (4/3)(2y - x^2)^{3/2}$ となっている。

Example 4.4. 円 $D = \{(x, y) \mid r^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ に対して直接面積を計算すると

$$f(x, y) = \arccos r - r\sqrt{1 - r^2}.$$

Remark 4.5. 領域の外側での関数を f の定義の双対となるように定義することができて、このときは 右辺 = 1 の方程式の解が得られるらしい。上の例では $f = (4/3)(x^2 - 2y)^{3/2}$ 及び $f = \operatorname{arccosh} r - r\sqrt{r^2 - 1}$ とすれば OK。これらの結果は 2次元の特性に基づいているように思われる。また、上記の議論では境界を滑らかとしたが、多面体に対しても定義可能で、離散的なアフィン球面の構成に使える。なお、(4.1) は境界条件無しでは面白くないものである。

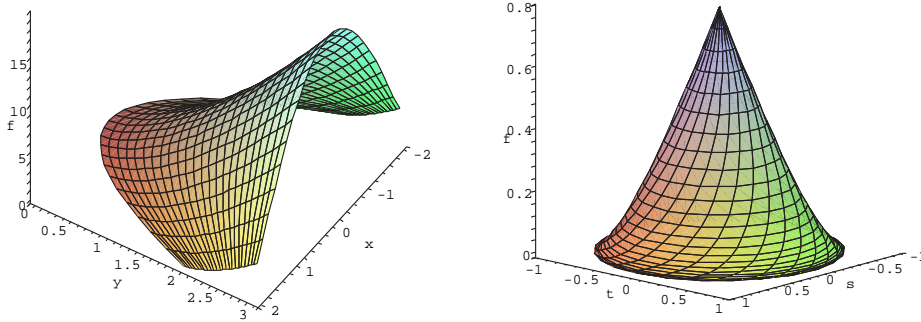


FIGURE 2. Parabolic indefinite affine spheres over $\{y \geq x^2/2\}$ and $\{x^2 + y^2 < 1\}$

5. 凸領域、凸曲線のアフィンの概念

5.1. アフィン曲率流. 一時期、曲線や曲面の曲率流が盛んに調べられたことがある。R. S. Hamilton による Ricci 曲率流は特にリーマン多様体の大域的構造を知る上で重要な役割を果たした。一方、画像処理の分野では、与えられたデータから滑らかな画像 (曲線) を得る方法として、曲線の曲率流が興味を引いた。どれほど有効なものであるかは知らないが、画像を認識する我々の視点が基本的に射影的であるので、曲線や曲面の射影曲率流やアフィン曲率流も有意義な研究対象である。その中でも最も簡単な中心アフィン曲率流は有用ではないかと思う。これらの研究では 2 次元のアフィン球面 (と直線及び平面) が重要な役割を果たす。ちょうどユークリッド幾何で直線と円が重要であることに似ている。これらについては、枚挙しがたいが幾つかを参考文献に記す。

内部の面積を変えないアフィン曲率流の作り方を紹介する。 n 次元のアフィン超曲面の t をパラメータとする族を写像 $f : (x, t) \mapsto \mathbf{R}^{n+1}$ で表し、そのアフィン法線を $\xi(x, t)$ とする。方程式

$$f_*(\partial/\partial t) = T + v\xi$$

をアフィン曲率流という。 T は何らかの方法で与えられた接ベクトル場の族であり、 $vv(x, t)$ はスカラー関数とする。 $v = 1$ のときが通常のアフィン曲率流で、更に $n = 1$ であれば放物型方程式 $\partial k/\partial t = \Delta k/3 + (4/3)k^2$ に還元される。有限時間内に無限小の楕円に縮むことが知られている。

アフィン超曲面 $f : M^n \mapsto \mathbf{R}^{n+1}$ の点 $f(x)$ と \mathbf{R}^{n+1} の固定点 p に対して、ベクトル $f(x) - p$ を接成分と ξ 成分に分解する：

$$f(x) - p = T + \rho\xi.$$

この $\rho = \rho(p, x)$ を点 p から $f(x)$ へのアフィン距離関数 (またはアフィン支持関数) という。これは便利な関数で、例えば、固有アフィン球面は「 ρ が (x) について定数」と特徴づけられる。

いま、超曲面は凸領域を囲んでいるとすると、超曲面の面積は

$$A = \int \theta$$

凸領域の体積は

$$V = -\frac{1}{n+1} \int \rho\theta$$

と表される。これらは曲率流のパラメータ t の関数である。アフィン平均曲率を $H = \text{tr}S/n$ と定めると、

$$\frac{\partial}{\partial t} A = -\frac{n(n+1)}{(n+2)} \int vH\theta, \quad \frac{\partial}{\partial t} V = -\int v\theta$$

である。特に $v = 1 + H\rho$ となる曲率流を考えると、ある積分公式から

$$\frac{\partial}{\partial t} A \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} V = 0$$

となることがわかる。すなわち、これは超曲面の囲む領域の体積を変えない。いずれも局所的な量を用いて記述されているので計算可能であるが、この方程式の解の様子については調べられていないと思う。最初の超曲面が超楕円面であれば、この曲率流は定常的で何も起こさないが、普通のアフィン曲率流では無限小の超楕円面に縮む。

5.2. Affine symmetric sets. $\gamma(s)$ を平面曲線としよう。パラメータ s をうまく採ると (一般的に) $\gamma' \wedge \gamma'' = 1$ とできる。(このパラメータをアフィンパラメータという。) このとき、 $\gamma' \wedge \gamma''' = 0$ であるので、 $\gamma''' = -k\gamma'$ とかける。 γ'' が曲線のアフィン法線であり、 k をアフィン曲率という。曲線の場合のアフィン距離関数 ρ は

$$\gamma(s) - p = a\gamma' + \rho\gamma''$$

で定まっている。

いま、 γ が凸領域 Ω を囲んでいるとする。集合

$$\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \text{異なる } s_1, s_2 \text{ について } g(p, s_1) = g(p, s_2), g_s(p, s_1) = g_s(p, s_2) = 0\}$$

(の閉包) を affine symmetric set という (Giblin-Sapiro)。また、凸領域 Ω とその境界 $C(s)$ に対し、

$$h(p, s) = \frac{1}{2} \int_{C(s)}^{C(t)} (C(u) - p) \wedge dC(u)$$

をアフィン面積距離という ([NBSTG])。ここで、 $p \in \Omega$; $C(t)$ は p と $C(s)$ を結ぶ直線の境界との別の交点。これは面積関数 (4.2) の元になる式である。 g の代わりに h を用いて定義した上記の集合を affine skelton set という。共に、アフィン不変な概念であり、アフィン不変な図形認識に重要と思われる。具体例については参考文献を参照。

REFERENCES

関連する文献を挙げる。その話題に関して重要な文献の順に挙げたという意味では全くなく、このあたりから過去に遡れるのではないかという選択をしている。例えば、アフィン超球面について最近でも様々な文献があるが網羅は全くしていない。それぞれに気楽な注釈を付ける。

特性関数について

- A. Korányi, The Bergman kernel function for tubes over convex cones, Pacific J. Math. 12(1962), 1355–1359. [筒領域上のベルクマン核関数]
- E. B. Vinberg, The theory of convex homogenous cones, Trans. Moscow Math. Soc. 12(1963), 340–403. [等質錐面の基本文献]
- S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det(\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j) = F(x, u)$, Comm. Pure Appl. Math. 30(1977), 41–68. [(2.1) の解の存在]
- T. Sasaki, Hyperbolic affine hyperspheres, Nagoya Math. J. 77(1980), 107–123. [双曲型アフィン超球面の構成]
- T. Sasaki, A note on characteristic functions and projectively invariant metrics on a bounded convex domain, Tokyo J. Math. 8(1985), 49–79. [凸領域上の特性関数]

- T. Sasaki, On the characteristic function of a strictly convex domain and the Fubini-Pick invariant, Results in Math. 13(1988), 367–378. [特性関数と(2.1)の形式解]

面積関数、affine symmetric sets 等について

- M. Craizer, M. Alvim and R. Teixeira, Area distances of convex plane curves and improper affine spheres, arXiv:0710.1854. [面積関数と放物型アフィン球面]
- [NBSTG] M. Niethammer, S. Betelu, G. Sapiro, A. Tannenbaum and P. J. Giblin, Area-based medial axis of planar curves, Intern. J. Computer Vision 60(2004), 203–224. [affine symmetric set 等]
- P. J. Giblin and G. Sapiro, Affine-invariant distances, envelopes and symmetry sets, Geometriae Dedicata 71(1998), 237–261. [同上]
- L. Moisan, Affine plane curve evolution: A fully consistent scheme, IEEE Trans. Image Processing 7(1998), 411–420. [affine scale space とよばれるもの]

アフィン曲率流について

- L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions and J. M. Morel, Axioms and fundamental equations of image processing, Arch. Rat. Mech. Anal. 123(1993), 199–257. [画像処理の考え方と曲率流]
- G. Sapiro and A. Tannenbaum, Affine invariant scale-space, Intern. J. Computer Vision 11(1993), 25–44. [アフィン曲率流について]
- G. Sapiro and A. Tannenbaum, On affine plane curve evolution, J. Functional Anal. 119(1994), 79–120. [同上]
- G. Sapiro and A. Tannenbaum, On invariant curve evolution and image analysis, Indiana Univ. Math. J. 42(1993), 985–1009. [同上]
- B. Andrews, Contraction of convex hypersurfaces by their affine normal, J. Diff. Geom. 43(1996), 207–230. [アフィン曲率流の解の存在証明]
- P. J. Olver, G. Sapiro and A. Tannenbaum, Invariant geometric evolutions of surfaces and volumetric smoothing, SIAM J. Appl. Math. 57(1997), 176–194. [種々の曲率流とその応用]
- L. L. Lima and J. F. Montenegro, Classification of solitons in affine geometry, An. Acad. Bras. Ci. 68(1996), 509–514. [アフィン曲率流の定常解]
- O. Faugeras, Sur l'évolution de courbes simples du plan projectif réel, C. R. 317(1993), 565–570. [曲線の射影曲率流についての最初の文献]

リーマン曲率流について

- G. Huisken, Flow by mean curvature of convex hypersurfaces into spheres, J. Diff. Geom. 20(1984), 237–266. [平均曲率流が有限時間内に一点に縮むこと]
- M. Gage, On an area-preserving evolution equation for plane curves, Contemporary Math. 51(1986), 51–62. [ユークリッド面積を保つ曲率流についての最初の文献]
- M. Gage and R. Hamilton, The shrinking of convex plane curves by the heat equation, J. Diff. Geom. 23(1986), 69–96. [曲率流についての基本的文献]

強擬凸領域の核関数について

- C. Fefferman, Parabolic invariant theory in complex analysis, Adv. Math. 31(1979), 131–262. [ベルクマン核関数の漸近展開項の微分不変量での表現]
- T. N. Baily, M. G. Eastwood and C. R. Graham, Invariant theory for conformal and CR geometry, Ann. Math. 139(1994), 491–552. [擬共形構造と共形構造の不変式論]

- Kengo Hirachi, Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel, *Ann. Math.* 151(2000), 151–191. [ベルクマン核関数の漸近展開の対数項]
- C. Fefferman and R. Graham, The ambient metric, arXiv:0710. 0919, 2007. [擬共形構造に付随した計量の総説]

アフィン球面について

- K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Univ Press, 1994. [アフィン微分幾何入門]
- U. Simon and C. P. Wang, Local theory of affine 2-spheres, *Proc. Symp. Pure Math.* 54(1993), Part 3, 585–598. [アフィン球面の共形構造と Tzitzeica 方程式]
- A. I. Bobenko and W. K. Schief, Affine spheres: Discretization via duality relations, *Experim. Math.* 8(1999), 261–280. [離散アフィン球面についての基本的文献]
- L. Ferrer, A. Martínez and F. Milán, Symmetry and uniqueness of parabolic affine spheres, *Math. Ann.* 305(1996), 311–327. [境界を与えて放物型アフィン球面を構成すること]
- L. Ferrer, A. Martínez and F. Milán, An extension of a theorem by K. Jörgens and a maximum principle at infinity for parabolic affine spheres, *Math. Zeits.* 230(1999), 471–486. [放物型アフィン球面の積分表現]
- J. Dorfmeister and U. Eitner, Weierstrass-type representation of affine spheres, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 71(2001), 225–250. [アフィン球面の DPW 法による積分表現]
- N. Matsuura and H. Urakawa, Discrete improper affine spheres, *J. Geometry and Phys.* 45(2003), 164–183. [離散放物型アフィン球面の構成]
- J. A. Gálvez, A. Martínez and P. Mira, The space of solutions to the Hessian one equation in the finitely punctured plane, *J. Math. Pure Appl.* 84(2005), 1744–1757. [$\mathbf{R}^2 - \{\text{finite points}\}$ 上の放物型アフィン球面の分類]

(Sasaki) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KOBE UNIVERSITY, KOBE 657-8501, JAPAN