令和 8 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2025 年 8 月 21 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし, 解答した問題番号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 1. $a \geq 0$ に対し, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -6 & a+4 & -2 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) A は 1 を固有値にもつことを示せ.

(2) A の固有値を全て求めよ.

(3) 任意の a に対し A が対角化可能であることを示せ.

(4) 任意の正の整数 n に対し $A^{n+2} = A^n$ となるような a を求めよ.

問題 2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をすべての成分が整数の 2 次正方行列とする．加法群 $\mathbb{Z}^2$ に対し, $\phi_A \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ を $\phi_A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2\right)$ とすることで定める．次の問に答えよ．

(1) ϕ_A が群準同型写像であることを示せ.

(2) $\det A = 1$ のとき, ϕ_A が群同型写像であることを示し, $(\phi_A)^{-1}$ を求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で $a, b > 0$ のとき, $\operatorname{Im} \phi_A \subset \mathbb{Z}^2$ が巡回群となることを示し, その生成元を求めよ.

(4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で $a, b > 0$ のとき, ある正の整数 m に対して $\mathbb{Z}^2/\operatorname{Im} \phi_A \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ となることを示し, また m を求めよ.

問題 3.　次の問に答えよ.

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq y\}$ に対し，積分

$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = (1+x)^{1/11}$ に対し $x = 0$ のまわりでテイラーの定理を適用することで，

$$-10^{-5} < \sqrt[11]{2026} - \frac{1023}{512} < 0$$

を示せ. ただし, 等式

$$\sqrt[11]{2026} = 2\left(1 - \frac{11}{1024}\right)^{1/11}$$

は用いてよい.

問題 4.　次の問に答えよ.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $(X \times Y, \mathcal{O})$ をその直積空間とする.

(i) $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ.

(ii) 直積位相 $\mathcal{O}$ の定義を述べよ.

(iii) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がともにハウスドルフ空間であるならば, $(X \times Y, \mathcal{O})$ もハウスドルフ空間であることを示せ.

(iv) $(X \times Y, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるならば, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ はともにハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ をハウスドルフ空間とする.

(i) X の部分集合 C がコンパクトであることの定義を述べよ.

(ii) C を X のコンパクトな部分集合とし, a を $a \notin C$ であるような X の点とする. このとき X の開集合 $U, V \in \mathcal{O}_X$ で, $U \ni a$, $V \supset C$, $U \cap V = \emptyset$ をみたすものが存在することを示せ.

令和 8 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2025 年 8 月 21 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 A. $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ とする．また $\alpha = \sqrt{7 + 2\sqrt{14}} \in \mathbb{R}$ とし，$F = L(\alpha)$ とおく．次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の拡大次数を求めよ．

(2) F/L の拡大次数を求めよ．

(3) F/L がガロア拡大かどうか答えよ．ガロア拡大である場合はそのガロア群が巡回群かどうか判定し，ガロア拡大でない場合は F の L 上のガロア閉包を E として，E/L の拡大次数を求めよ．

(4) $F/\mathbb{Q}$ がガロア拡大かどうか答えよ．

問題 B. 次の環は UFD か．理由とともに答えよ．ただし x, y は不定元とする．

(1) $\mathbb{Z}[x]$.

(2) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 5)$.

(3) $\mathbb{Z}[x]/(ax - 1)$. ここで a は正の整数.

(4) $\mathbb{R}[x^2, xy, y^2]$.

問題 C. xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元円板 D と E を

$$D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\},$$
$$E = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1\}$$

で定める．また，D の境界 ∂D を y 軸の周りに一回転して得られる曲面を T とし，$X = T \cup D$, $Y = T \cup D \cup E$ とする．

(1) T を図示せよ．

(2) T の基本群 $\pi_1(T)$, ホモロジー群 $H_n(T)$ $(n = 0, 1, 2)$, およびオイラー標数 $\chi(T)$ を求めよ．

(3) X は，円周 S^1 と 2 次元球面 S^2 との一点和 $S^1 \vee S^2$ にホモトピー同値であることを証明せよ．

(4) Y の基本群 $\pi_1(Y)$, ホモロジー群 $H_n(Y)$ $(n = 0, 1, 2)$, およびオイラー標数 $\chi(Y)$ を求めよ．

問題 D.　次の問に答えよ.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f(u,v) = \left(u, u+v, u^2 + \dfrac{v^2}{2}\right)$ で定まる曲面とする. f のガウス曲率と平均曲率を求めよ.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ で $g'(t) > 0$ となる C^∞ 関数とする. $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\alpha(t) = (g(t), \cosh g(t))$ で定まる平面曲線とする. α の単位法線ベクトルで $\det \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ n(t) \end{pmatrix} > 0$ となるものを $n(t)$ とする. ただし $g' = dg/dt$, $\alpha' = d\alpha/dt$ であり, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ である.

(i) 単位法線ベクトル $n(t)$ を求めよ.

(ii) t が α の弧長パラメーターとなる $g(t)$ を求めよ.

問題 E.　$-1 < a < 1$, $f(z) = \dfrac{z^a}{(z+2)(z+3)}$ とする. ただし, $\mathbb{C}$ から半直線 $[0,\infty)$ を除いた領域を D とし, z^a を D において $0 < \arg z < 2\pi$ とすることにより定める. 次の問に答えよ.

(1) $f(z)$ $(z \in D)$ の全ての極とそこでの留数を求めよ.

(2) 積分 $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+2)(x+3)} dx$ の値を求めよ.

問題 F.　f は $\mathbb{R}$ 上の実数値可積分関数とし，$n = 1, 2, \ldots$ に対し

$$g_n(x) = f(x)x^n$$

とする．次の問に答えよ.

(1) g_n は $[0,1]$ において可積分であることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n(x)\,dx = 0$ を示せ.

(3) a は $0 < a < 1$ をみたす定数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n \int_{[0,a]} g_n(x)\,dx \right) = 0$ を示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ が存在するとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n \int_{[0,1]} g_n(x)\,dx \right) = \lim_{x\to 1} f(x)$ を示せ.

問題 G.　`sizeof(int)` の値が 4 である C 言語について，次の問に答えよ．ただし，`int` 型のデータは 2 の補数表現で表されているものとする．

(1) 以下のプログラムの実行結果はどのようになるか．理由をつけて答えよ．ただし，関数 `fnc` で用いられている `&` はビットごとの論理積である．`<<` は左シフト演算を表し，左方向への bit の回転 (bit rotation) として実現しているとする．また $2^{31} = 2147483648$ である．

```
#include <stdio.h>

void fnc(int c){
  int i;
  int k=-2147483648;
  for(i=0;i<32;i++){
    if((c & k) != 0){
      printf("1");
    }else{
      printf("0");
    }
    c = c<<1;
  }
  printf("\n");
  return;
}

int main(){
  fnc(10);
  fnc(-10);
  return 0;
}
```

(2) n 桁の正の 10 進整数を配列 `int a[N]` に

- `a[0]` は桁数，
- $\mathtt{i} > 0$ に対して `a[i]` は i 桁目の数

という形式で格納する．例えば 1234 は `a[0]=4`, `a[1]=4`, `a[2]=3`, `a[3]=2`, `a[4]=1` のように格納される．この形で表された 2 つの整数 `x`，`y` について，その差 $\mathtt{x} - \mathtt{y}$ を求めてこの形式で格納する関数を C 言語で書け．ただし，$\mathtt{x} > \mathtt{y}$ とする．また，具体的に `N` の値は定めなくてよく，`x`, `y` のどちらについても，`N` は `n` よりも十分大きいものとする．