令和 6 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2023 年 8 月 23 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 1.　次の問に答えよ．

(1) a, b を実数とする．この時，$\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

によって生成される $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間の次元を求めよ．

(2) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

と定める．次の問に答えよ．

(a) A の固有多項式を求めよ．

(b) 次を満たす実数 α, β, γ と直交行列 T を一組与えよ．

$$A = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} T^{-1}.$$

問題 2.　次の問に答えよ．

(1) G を群とし，H をその部分群とする．$g \in G$ とし，$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ と定める．次を示せ．

(a) gHg^{-1} は G の部分群である．

(b) H が有限群であるとき，H と gHg^{-1} は位数が等しい．

(2) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ を位数 5 の有限体とし，$\mathbb{F}_5^\times = \mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$ をその単数群とする．

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{F}_5^\times, y \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

とおく．G は行列の積を演算として群をなす．次の問に答えよ．

(a) G の位数を求めよ．

(b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{F}_5^\times \right\}$ は G の部分群であることを示せ．

(c) G の位数 4 の部分群を 3 つ挙げよ．

問題 3.　次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x, y) = (3 - x^2 - y^2)e^x$ の極値を全て求めよ．

(2) a を正の実数とする．$a_n = \dfrac{a^n}{n^2}$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するか，発散するか判定せよ．

(3) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x \leqq \dfrac{1}{2},\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2} \right\}$ に対して，積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ の値を求めよ．

問題 4. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$, $(Y, \mathcal{O}_2)$ について次の問に答えよ.

(1) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ がコンパクトであることの定義を述べよ.

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ から位相空間 $(Y, \mathcal{O}_2)$ への写像 $f : X \to Y$ が連続であることの定義を述べよ.

(4) $(X, \mathcal{O}_1)$ をハウスドルフ空間とし, $C \subset X$ を X のコンパクトな部分集合とする. このとき C が閉集合であることを示せ.

(5) $(Y, \mathcal{O}_2)$ をハウスドルフ空間とし, $f : X \to Y$ と $g : X \to Y$ を連続写像とする. このとき $I = \{p \in X \mid f(p) = g(p)\}$ が X の閉集合であることを示せ.

令和 6 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2023 年 8 月 23 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 A.　次の問に答えよ．

(1) L/K を体の有限拡大とし，M をその中間体とする．この時，次の主張 (a), (b) について，主張が正しい場合には証明を与え，間違っている場合には反例をあげよ．ただし，反例であることの証明はしなくてよい．

　(a) $L/M, M/K$ がガロア拡大なら，L/K もガロア拡大である．

　(b) L/K がガロア拡大なら，L/M もガロア拡大である．

(2) n は正の整数とし，ζ_k は 1 の原始 k 乗根を表す．次の問に答えよ．

　(a) $\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}$ が 2 次のガロア拡大であることを示せ．

　(b) $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(\zeta_3)$ が 3 次のガロア拡大であることを示せ．

　(c) $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(t^n)$ が n 次ガロア拡大であることを示せ．ただし，t は不定元，$\mathbb{C}(x)$ は複素係数多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の商体を表す．

問題 B.　A を単位元を持つ可換環とし，$M(A)$ を A から A への写像全体のなす集合とする．$f, g \in M(A)$ の和 $f + g \in M(A)$ と積 $f \cdot g \in M(A)$ を次が成り立つように定める．

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \quad (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a), \qquad a \in A.$$

この演算により $M(A)$ は単位元を持つ可換環となる．また，$A[x]$ を A 係数多項式環とする．

(1) $M(A)$ の元の積が結合法則を満たすことを確かめよ．

(2) $h(x) \in A[x]$ に対し $\phi_A(h(x)) \in M(A)$ を次が成り立つように定める．

$$\phi_A(h(x))(a) = h(a), \qquad a \in A.$$

これにより写像 $\phi_A\colon A[x] \to M(A)$ を定めるとき，ϕ_A が環準同型であることを示せ．

(3) $\phi_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}[x] \to M(\mathbb{R})$ が単射であることを示せ．

(4) p を素数とし，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ を位数 p の有限体とする．$\phi_{\mathbb{F}_p}\colon \mathbb{F}_p[x] \to M(\mathbb{F}_p)$ の核が $x^p - x$ によって生成されるイデアルであることを示せ．

問題 C.　周および内部からなる正方形 ABCD と，その内部に開円板 Δ がある．辺 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，および辺 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を，それぞれ向きを込めて重なるように同一視してできる閉曲面から，開円板 Δ を取り除いて得られる曲面を X とする．また，辺 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，および辺 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ を，それぞれ向きを込めて重なるように同一視してできる閉曲面から，開円板 Δ を取り除いて得られる曲面を Y とする．さらに，X の境界の円周と Y の境界の円周を同一視して得られる閉曲面を F とする．次の問に答えよ．

(1) X の基本群 $\pi_1(X)$ とホモロジー群 $H_n(X)$ を求めよ．

(2) Y の基本群 $\pi_1(Y)$ とホモロジー群 $H_n(Y)$ を求めよ．

(3) F のホモロジー群 $H_n(F)$ を求めよ．また，F のオイラー標数 $\chi(F)$ と種数 $g(F)$ を求めよ．

問題 D. $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$ とし，$f : U \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(u,v) = \left(\frac{2}{e^u + e^{-u}} \cos v,\ \frac{2}{e^u + e^{-u}} \sin v,\ u - \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \right)$$

と定める．

(1) $p = (u,v) \in U$ とする．$\operatorname{rank} df_p$ を求めよ．

(2) f のガウス曲率 K を求めよ．

(3) f の平均曲率 H を求めよ．

(4) $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ を $u_0 > 0$ となる定数とする．曲面 f 上の曲線 $u \mapsto f(u, v_0)$ $(u > 0)$ と $v \mapsto f(u_0, v)$ が共に曲率線であることを示せ．

問題 E. $-1 < a < 1$，$z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^{az} - e^{-az}}{e^z - e^{-z}}$ とする．次の問に答えよ．

(1) $f(z)$ の全ての極とそこでの留数を求めよ．

(2) 実軸上の積分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ．

問題 F. $s > 0$，$A > 0$ とし，$I_A = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} \left(\int_0^A \frac{\sin tx \cos sx}{x}\, dx \right) dt$ とおく．次の問に答えよ．

(1) 任意の $\theta > 0$ に対し $|\sin\theta| \leq \theta$ であることを示せ．

(2) $I_A = \displaystyle\int_0^A \frac{\cos sx}{x} \left(\int_0^\infty e^{-t} \sin tx\, dt \right) dx$ を示し，$I_A = \displaystyle\int_0^A \frac{\cos sx}{1+x^2}\, dx$ を導け．

(3) $b > a > 0$ とする．$\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ であることを用い，実数 C が存在して $\left| \displaystyle\int_0^A \frac{\sin(b \pm a)x}{x}\, dx \right| \leq C$ が任意の $A > 0$ と $b > a > 0$ に対して成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin(b \pm a)x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

(4) $s, t > 0$ とする．$t > s$ なら $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin tx \cos sx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ であり，$t < s$ なら $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin tx \cos sx}{x}\, dx = 0$ であることを示せ．

(5) $\displaystyle\lim_{A\to\infty} I_A = \int_s^\infty \frac{\pi}{2} e^{-t}\, dt$ を示し，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos sx}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-s}$ $(s > 0)$ を導け．

問題 G. 次の問に答えよ．

(1) 下記の C 言語のプログラムの実行結果を書きそのような出力を得る理由を述べよ．

```
#include <stdio.h>
int main() {
  int c=1,i;
  for (i=30; i<33; i++) printf("%d: %d\n",i,c<<i);
  return 0;
}
```

ただし実行した処理系では `sizeof(int)` は 4 であり，`int` 型のデータは 2 の補数により表現されている．また `int` 型データに対する左シフト演算は左方向への bit の回転 (bit rotation) として実現している．なお $2^{31} = 2147483648$.

(2) 2^n，$0 \leq n \leq 100$ を計算し出力する C 言語のプログラムを書きその仕組みを説明せよ．