令和 5 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2022 年 8 月 24 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし, 解答した問題番号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 1. $\mathbb{R}$ 上の 3 次元線形空間 V を高々 2 次の実数係数多項式からなる集合, つまり

$$V = \left\{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

で定める. また, V から V への線形写像 I を次が成り立つように定める.

$$I(f) = x^{-1}\left(\int_0^x f(y+1)\,dy\right), \quad f \in V$$

(1) $I(x^2), I(x), I(1)$ を求めよ.

(2) 基底 $x^2, x, 1$ に関する I の表現行列を求めよ.

(3) $I(f) = tf$ となる $t \in \mathbb{R}$ と $0 \neq f \in V$ を全て求めよ.

(4) 正の整数 n に対し, $I^n(x^2+x+1)$ を求めよ. ただし, I^n は I の n 回合成をあらわす.

問題 2. G を群とし, $G \times G$ を直積群とする. 群準同型写像 $f\colon G \to G$ に対し,

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in G\} \subset G \times G$$

とする. $e \in G$ を単位元とし, $x \in G$ の逆元を $x^{-1} \in G$ とする.

(1) 群準同型写像 $f\colon G \to G$ と $y \in G$ に対し, $f(e) = e$ および $f(y)^{-1} = f(y^{-1})$ を示せ.

(2) 群準同型写像 $f\colon G \to G$ に対し, G_f は $G \times G$ の部分群であることを示せ.

(3) 群準同型写像 $f\colon G \to G$ に対し, 群同型写像 $F\colon G \to G_f$ を構成せよ.

(4) 次の条件 (a), (b) が同値であることを示せ.

(a) G はアーベル群である.

(b) 全射群準同型写像 $f\colon G \to G$ であって, G_f が $G \times G$ の正規部分群となるものが存在する.

問題 3. 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ の極値をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続か? 証明とともに答えよ.

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$ に対して, $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{Arctan} y}{\sqrt{(1-x)(x-y)}}\,dxdy$ の値を求めよ.

問題 4. 次の問に答えよ.

(1) X, Y, Z を位相空間とし, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ を写像とする.

(a) f が連続であることの定義を述べよ.

(b) f, g がともに連続であるならば, その合成写像 $g \circ f: X \to Z$ も連続であることを示せ.

(2) X を位相空間とする.

(a) X がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ.

(b) X がハウスドルフ空間であるならば, 任意の点 $x \in X$ に対して, 1 点集合 $\{x\}$ は X の閉集合であることを示せ.

(3) A, B を位相空間 X の部分集合とする.

(a) A がコンパクトであることの定義を述べよ.

(b) A, B がともにコンパクトであるならば, その和集合 $A \cup B$ もコンパクトであることを示せ.

令和 5 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2022 年 8 月 24 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 A. 次の問に答えよ．

(1) K を体とする．

(a) K のイデアルをすべて求めよ．

(b) F/K, F'/K を体の有限拡大とする．環準同型写像 $\rho\colon F \to F'$ であって，任意の $a \in K$ について $\rho(a) = a$ であるものが存在するとする．このとき $[F : K] \leq [F' : K]$ であることを示せ．

(2) 次のそれぞれの $P \in \mathbb{Q}[X]$ について，P の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を F とするとき，$[F : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(a) $P = X^4 - 25X$.

(b) $P = X^4 - 14X^2 - 14$.

問題 B. 実数 a, b について，実数係数 2 変数多項式環 $\mathbb{R}[x, y]$ のイデアルを $I_{a,b} = (x^2 + ay^2, bx)$ で定める．

(1) 整域の素元は既約元であることを示せ．

(2) $I_{a,b}$ が素イデアルとなる a, b の範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 全ての $I_{a,b}$ を含む素イデアルを全て求めよ．

問題 C. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ 内の部分集合 A, B を

$$A = \{((\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\sin v, \sin u) \mid u, v \in \mathbb{R}\},$$
$$B = \{(r\cos u, r\sin u, 0) \mid u \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq 1\}$$

で定める．A は円 $\{(\cos u + 2, 0, \sin u) \mid u \in \mathbb{R}\}$ を z 軸のまわりに一回転して得られるトーラスである．

(1) A の基本群 $\pi_1(A)$ とホモロジー群 $H_n(A)$ $(n = 0, 1, 2)$ を求めよ．

(2) $X = A \cup B$ の基本群 $\pi_1(X)$ とホモロジー群 $H_n(X)$ $(n = 0, 1, 2)$ を求めよ．

問題 D.　写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ をはめ込みとする．f の単位法線ベクトルを N とする．$\mathbb{R}^2$ の座標を (u,v) とし，f の第一基本行列 I, 第二基本行列 II, 第三基本行列 III をそれぞれ

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix} f_u\cdot f_u & f_u\cdot f_v \\ f_u\cdot f_v & f_v\cdot f_v \end{pmatrix},\quad \mathrm{II}=-\begin{pmatrix} f_u\cdot N_u & f_u\cdot N_v \\ f_u\cdot N_v & f_v\cdot N_v \end{pmatrix},\quad \mathrm{III}=\begin{pmatrix} N_u\cdot N_u & N_u\cdot N_v \\ N_u\cdot N_v & N_v\cdot N_v \end{pmatrix}$$

とする．さらに任意の (u,v) に対して f_u と f_v は直交し，f_{uv} は 0 でなければ N と直交するとする．ここで，$(\ )_u=\partial/\partial u$, $(\ )_v=\partial/\partial v$ であり，$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}$ は，$\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積をあらわす．

(1) I, II, III はすべて対角行列であることを示せ．

(2) $u_0,v_0\in\mathbb{R}$ を固定する．曲線 $c:v\mapsto f(u_0,v)$ と $d:u\mapsto f(u,v_0)$ が共に f の曲率線であることを示せ．

(3) K と H をそれぞれ f のガウス曲率，平均曲率とする．このとき，

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=O$$

が成り立つことを示せ．ただし O は零行列をあらわす．

問題 E.　次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{1}{\sin^2 z}$ および $\dfrac{1}{\sin^4 z}$ の $z=0$ のまわりでのローラン展開の主要部を求めよ．

(2) $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^4}$ とする．$f(z)=\dfrac{a}{\sin^4 z}+\dfrac{b}{\sin^2 z}+c$ となるような定数 a, b, c があれば求めよ．

問題 F.　K を $\mathbb{R}$ 上の非負連続関数で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}K(t)dt=1$ をみたすものとする．正の整数 n と有界な連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して，関数 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_n(x)=\int_{\mathbb{R}}nK(nt)f(x-t)dt$$

によって定める．

(1) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の $\delta>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(-\infty,-\delta)\cup(\delta,+\infty)}nK(nt)dt=0$$

が成り立つことを示せ．

(3) f が一様連続ならば，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束することを示せ．

問題 G. 漸化式 $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, $(n \geq 2)$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ で定まる多項式 $T_n(x)$ を計算するために以下のようなプログラムを C 言語で作成した (まだ完成していない). このプログラムでは 0 でない多項式 $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $c_n \neq 0$ を int 型の配列 $\{n, c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ に格納している.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int *new_poly(int deg) {
  int *h;
  h=(int *)malloc(sizeof(int)*(deg+2));
  h[0]=deg;  return h;
}
int *sub_poly(int *f, int *g) {
  /*(あ) f-g を計算して戻す. ただし f の次数は g の次数より大きいと仮定 */
}
/* 2*x*f(x) を求める. */
int *mul_2x(int *f) {
  int i,degf;
  int *h;
  degf = f[0];
  h = new_poly(degf+1);
  for (i=2; i<=degf+2; i++) h[i]=2*f[i-1];
  h[1]=0;
  return h;
}
int *cheb(int n) {
  int *f,*g,*h;
  if (n==0) { h=new_poly(0); h[1]=1; return h;
  }else if (n==1) { h=new_poly(1); h[1]=0; h[2]=1; return h;
  }else{
    f=cheb(n-1); g=cheb(n-2); f=mul_2x(f);
    return sub_poly(f,g);
  }
}
void print_poly(int *f) {
   /*(い) 多項式 f を出力 */
}
int main() {
  int i;
  for (i=0; i<=33; i++) print_poly(cheb(i));
}
```

次の問に答えよ.

(1) プログラムコメント中の (い) を実現するコードを書け.

(2) プログラムコメント中の (あ) を実現するコードを書け.

(3) 多項式 $T_n(x)$ の最高次の係数 c_n を求めよ. このプログラムが出力する c_n の値が正しくない n を $0 \leq n \leq 33$ の範囲で求めよ. ただし sizeof(int) は 4 とする.

(4) このプログラムでは再帰呼出しを用いて $T_n(x)$ を関数 cheb(n) で計算している. このプログラムの場合, 再帰を用いることの問題点を指摘せよ.