令和 4 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2021 年 8 月 25 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 1. a を実数とする．行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

と定める．縦ベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ の転置を ${}^t v$ と書く．写像 $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(v) = {}^t v A v$ で定める．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) f が線形写像でないことを示せ．

(4) f が全射となる a の範囲を求めよ．

問題 2. 次の問に答えよ．

(1) 加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群は巡回群であることを示せ．

(2) 以下の群 G_1, G_2, G_3, G_4 が巡回群かどうかを理由をつけて答えよ．

(a) G_1 は加法群 $\mathbb{R}$ の部分群で，$\sqrt{18}$ と $\sqrt{200}$ で生成される群．
(b) G_2 は加法群 $\mathbb{R}$ の部分群で，$\sqrt{20}$ と $\sqrt{200}$ で生成される群．
(c) G_3 は 4 次対称群 S_4 の部分群で，2 つの互換 $(1\,2)$, $(3\,4)$ で生成される群．
(d) $G_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

問題 3. 次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ の上限は $\sqrt{2}$ であることを示せ．

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非減少数列とする．ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が実数 α に収束するならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束することを示せ．

(3) $t \geq 0$ に対して $D(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \leq 0,\ x - y \leq t\}$ とおく．関数

$$f(t) = t\left(1 - 2\iint_{D(t)} e^{-(x-y)^2}\, dxdy\right)$$

の $t \geq 0$ における最大値を求めよ．

問題 4. 次の問に答えよ．

(1) X を位相空間，A を X の部分空間とする．X がハウスドルフ空間ならば A もハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) 次の条件を満たす位相空間 X, Y および写像 $f : X \to Y$ の例を挙げ，その例が条件を満たすことを示せ．

条件：f は全単射かつ連続であり，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ は連続ではない．

(3) X, Y を位相空間とする．直積空間 $X \times Y$ がコンパクトならば X, Y もコンパクトであることを示せ．

令和 4 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2021 年 8 月 25 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 A. 自然数 t に対し，$\alpha_t = \sqrt{t+\sqrt{5}}$ とおく．また，$P_t(x) = x^4 - 2tx^2 + t^2 - 5$ とおき，$P_t(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を L_t と書く．

(1) $t = 5$ のとき，次の問に答えよ．

(a) $P_5(x)$ は α_5 の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式であることを示せ．

(b) $L_5 = \mathbb{Q}(\alpha_5)$ となることを示せ．

(c) $L_5/\mathbb{Q}$ は 4 次の巡回拡大であることを示せ．

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{11}, \sqrt{5}) \subset L_4$ を示せ．また，$L_4/\mathbb{Q}$ が 4 次の巡回拡大ではないことを示せ．

問題 B. 可換環 R に対し $R[x]$ を R 係数 1 変数多項式環とし，有限個の元 $f_1, \ldots, f_k \in R[x]$ で生成される $R[x]$ のイデアルを $(f_1, \ldots, f_k)$ で表す．

(1) p を素数とする．$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ とし，$n \in \mathbb{Z}$ の $\mathbb{F}_p$ における像を $\bar{n}$ で表す．$a, b \in \mathbb{Z}$ に対し，環同型

$$\mathbb{Z}[x]/(p, x^2 + ax + b) \simeq \mathbb{F}_p[x]/(x^2 + \bar{a}x + \bar{b})$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{Z}[x]/(3, x^2 + 9x - 1)$ が整域であるか判定せよ．

(3) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 9x - 1)$ と $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 9x + 3)$ が環として同型か判定せよ．

問題 C. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形 A, B_r $(r = 1, 2)$, C, D_s $(s = 0, 1, 2, 3)$ を次のように定める．

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}, \\
B_r &= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}, \\
C &= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 3\}, \\
D_s &= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = s\}.
\end{aligned}$$

また $X = A \cup B_1 \cup B_2$, $Y = C \cup D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$ とおく．

(1) 図形 X を図示せよ．

(2) 図形 Y を図示せよ．

(3) X と Y は同相であることを説明せよ．

(4) Y は 3 つの 2 次元球面の 1 点和とホモトピー同値であることを説明せよ．

(5) X の基本群 $\pi_1(X)$ とホモロジー群 $H_n(X)$ $(n = 0, 1, 2)$ を求めよ．

問題 D. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を C^∞ はめこみとする. 定義域 $\mathbb{R}^2$ の座標を (u_1,u_2) とし, $f(u_1,u_2)$ の第一, 第二基本形式は対角であるとする. すなわち f の単位法線ベクトル n に対して

$$\mathrm{I}=\left((f_{u_i}\cdot f_{u_j})_{i,j=1,2}\right)=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22}\end{pmatrix},\ \mathrm{II}=\left((-n_{u_i}\cdot f_{u_j})_{i,j=1,2}\right)=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix}$$

$(g_{11}>0,\, g_{22}>0)$ とする. ここで, h に対して $h_{u_i}=\partial h/\partial u_i$ であり, $\cdot$ は $\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積である.

(1) 任意の (u_1,u_2) で $n_{u_1}\cdot n=0,\ n_{u_2}\cdot n=0$ を示せ.

(2) (u_1,u_2) の関数 a,b,c,d を

$$n_{u_1}=af_{u_1}+bf_{u_2},$$
$$n_{u_2}=cf_{u_1}+df_{u_2}$$

で定める. a,b,c,d を $g_{11},\ g_{22},\ b_{11},\ b_{22}$ で表せ.

(3) f の平均曲率関数 H を $g_{11},g_{22},b_{11},b_{22}$ で表せ.

(4) 実定数 t に対して $f+tn$ がはめこみのとき, n は $f+tn$ の単位法線ベクトルであることを示せ.

(5) f の平均曲率 H は 0 でない定数と仮定し, さらに $f+\dfrac{1}{H}n$ がはめこみと仮定する. このとき $f+\dfrac{1}{H}n$ の平均曲率を H で表せ.

問題 E. 次の問に答えよ.

(1) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)(z^2+4)}$ のすべての極とそこでの留数を求めよ.

(2) 積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)(x^2+4)}dx$ の値を求めよ.

問題 F. $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ をルベーグ可測関数とする. $\mathbb{R}$ 上の関数 g を $g(t)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-|x-t|}\,dx$ で定める.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上有界とする. このとき g は $\mathbb{R}$ 上有界であることを示せ.

(2) 次の条件を満たす定数 $C\geq 0$ が存在するとする.

任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x)\leq C(1+x^2)$ となる.

このとき, 以下の問に答えよ.

(a) 次の条件を満たす定数 $M\geq 0$ が存在することを示せ.

任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $g(t)\leq M(1+t^2)$ となる.

(b) g は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ.

問題 G. 次の問に答えよ.

(1) C 言語における `sizeof(int)` とは何か説明せよ.

(2) $a>b>0$ を整数とする. このとき $a=qb+r,\ 0\leq r<b$ となる整数 q,r が一意的に存在する. a,b を `int` 型のデータで扱えるサイズの数とするとき, a,b を引数とし, q,r を構造体として戻す C 言語の関数を書きなさい.

(3) (2) の仮定に加えて, a,b を互いに素な整数とする. (X',Y') を $bX'+rY'=1$ の整数解とするとき, $X=Y',\ Y=X'-qY'$ は $aX+bY=1$ の整数解となる. この事実を用いて, $aX+bY=1$ の整数解 (X,Y) をひとつ, 再帰を用いて求めるプログラムを C 言語で書きなさい.