2020 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2019 年 8 月 20 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 1. $M_2(\mathbb{R})$ を実数係数 2 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$-線形空間とする．$P \in M_2(\mathbb{R})$ に対し ${}^tP$ を P の転置行列とし，$\mathbb{R}$-線形変換 $f_P\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$f_P(A) := {}^tPAP$$

により定義する．また $S_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R})$ を 2 次対称行列全体のなす集合とする．次の問に答えよ．

(1) $S_2(\mathbb{R})$ が $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．

(2) $S_2(\mathbb{R})$ の基底を一組挙げよ．

(3) $f_P(S_2(\mathbb{R})) \subset S_2(\mathbb{R})$ であることを示せ．

(4) $S_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-線形変換 g_P を $g_P := f_P|_{S_2(\mathbb{R})}$ により定める．$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，(2) で挙げた基底に関する g_P の表現行列を求めよ．

(5) g_P が全射になることと P が可逆であることが同値であることを示せ．

問題 2. 次の問に答えよ．

(1) 群の定義を述べよ．

(2) $G := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ とおく．G の 2 元 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対し，積を

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, (-1)^{x_2} y_1 + y_2)$$

と定めるとき，G はこの積に関し群になることを示せ．

(3) (2) の群 G に対し，

$$H := \{(x, y) \in G \mid x \in 2\mathbb{Z}, y \in 3\mathbb{Z}\}$$

は正規部分群になることを示せ．

問題 3. 次の問に答えよ．

(1) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leqq 1,\ |y| \leqq \sqrt{3}x\right\}$ に対して，広義積分 $\displaystyle\iint_D x\left|\log(x^2 + y^2)\right| dxdy$ の値を求めよ．

(2) 平面 $\mathbb{R}^2$ の $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2\right\}$ 上で，2 変数関数 $f(x, y) = xy(3 - x^2 - y^2)$ の最大値，最小値を求めよ．

(3) $[0, \infty)$ 上の非負値単調減少な連続関数 $f(x)$ に対し，数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = \int_0^n f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

で定める．$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

問題 4. 次の問に答えよ．

(1) 位相空間 X, Y がハウスドルフ空間であるとき，その直積空間 $X \times Y$ もハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) X を離散位相空間とする．X の空でない部分集合 A がコンパクトであるための必要十分条件は A が有限集合であることを示せ．

2020 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2019 年 8 月 20 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 A. p を素数とする．

$$R := \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \text{ は } p \text{ で割り切れない} \right\}$$

とおく．次の問に答えよ．

(1) R が $\mathbb{Q}$ の部分環であることを示せ．

(2) p が生成する R のイデアルが極大であることを示せ．

(3) (2) の極大イデアル以外に R が極大イデアルを持たないことを示せ．

(4) R 係数 1 変数多項式環 $R[X]$ の X^2+1 で生成されるイデアルを I とおく．I が素イデアルであることを示せ．

(5) (4) のイデアル I を含む $R[X]$ の極大イデアルを J とおく．J が p を含むことを示せ．

問題 B. $\omega = \exp(2\pi i/3) \in \mathbb{C}$ とし，K は ω を含むような $\mathbb{C}$ の部分体とする．$a, b \in K$ とし，$P(X) = X^6 + aX^3 + b \in K[X]$ は K 上既約であるとする．$\alpha \in \mathbb{C}$ を P の根の一つとし，$F = K(\alpha)$, $L = K(\alpha^3)$ とする．次の問に答えよ．

(1) $\alpha^3 \in L$ の K 上の最小多項式は $Q(X) = X^2 + aX + b$ であることを示せ．

(2) F/L の拡大次数を求めよ．

(3) F/L, L/K は共に Galois 拡大であることを示せ．

(4) $b = c^3$ となる $c \in K$ が存在するとする．$\beta = c\alpha^{-1}$ とおくと，(1) の $Q(X)$ について，$Q(X) = (X-\alpha^3)(X-\beta^3)$ であることを示せ．またこのとき，F/K は Galois 拡大で，その Galois 群は非可換群であることを証明せよ．

問題 C. 正方形 ABCD がある．ただし周および内部を含むとする．次の問に答えよ．

(1) 辺 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，および辺 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ を，それぞれ向きを込めて重なるように同一視してできる閉曲面を X とする．X の基本群およびホモロジー群を求めよ．

(2) 辺 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，および辺 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と辺 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ を，それぞれ向きを込めて重なるように同一視してできる閉曲面を Y とする．Y の基本群およびホモロジー群を求めよ．

(3) X と Y は同相であることを示せ．

問題 D.　実数 a に対して $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を

$$f(u,v)=(u\cos v, u\sin v, au+v)$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) 曲面 f のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

(2) $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を $\gamma(t)=(t,t)$ で定める．$a=0$ のとき曲面 f 上の曲線 $f\circ\gamma$ の測地曲率と法曲率を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の座標を (X,Y,Z) とする．$\mathbb{R}^3$ 上の一次微分形式 $w=YdX+dZ$ の引き戻し f^*w を $\mathbb{R}^2$ の座標 (u,v) に関して座標表示せよ．

問題 E.　$a>0$ とする．次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+a^2}dx$

問題 F.　関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は Lebesgue 可測で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx<\infty$ を満たすとする．$g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を各 $t\in\mathbb{R}$ に対し

$$g(t):=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-itx}\,dx$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $t\in\mathbb{R}$ とする．このとき次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|g(t)|\le\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx.$$

(2) $t\in\mathbb{R}$ とし，$(h_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n=0$ を満たす実数列とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}g(t+h_n)=g(t)$ が成り立つことを示せ．

(3) $t,h\in\mathbb{R}$ とする．このとき次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\bigl|g(t+h)-g(t)\bigr|\le\sqrt{2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\bigl(1-\cos(hx)\bigr)\,dx\right)^{1/2}.$$

(4) g は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

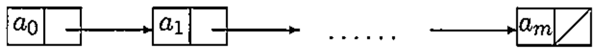
問題 G. 次の問に答えよ.

(1) 2^{30} を C 言語の 16 進数の記法を用いて表せ.

(2) $N = 2^{30}$ とおく. N 進数で表現した自然数

$$a_m N^m + a_{m-1} N^{m-1} + \cdots + a_1 N + a_0, \quad 0 \leq a_i < N, a_m \neq 0$$

を次の形式のリスト構造として表現する.



リストの各セルを構造体

```
struct ncell {
  int n;
  struct ncell *next;
};
```

で表すとして, 与えられた自然数を 2 倍する関数を C 言語で書きなさい. ただし `sizeof(int) = 4` とする.