平成 31 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 30 年 8 月 23 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とするが，書ききれない場合は監督者に解答用紙をもらうこと．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書き，解答した問題番号を明示 すること．

問題 1. a を 0 でない実数とする．行列 A と B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a^3 & a^4 & -a^4 \end{pmatrix}$$

と定める．A, B の転置行列をそれぞれ ${}^tA$, ${}^tB$ と書く．このとき，次の問に答えよ．

(1) ${}^tAA$ の固有値を全て求めよ．

(2) $AP = B$ を満たす 3 次対称行列 P を全て求めよ．

(3) (2) の P の中に直交行列が存在するような a を全て求めよ．

(4) (2) の P が直交行列であるとき，${}^tBB$ の固有値を全て求めよ．

問題 2. $\boldsymbol{C}$ を複素数体とする．p を 3 以上の素数とし，$\omega_p \in \boldsymbol{C}$ を 1 の原始 p 乗根とする．行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \omega_p & 0 \\ 0 & -\omega_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める．G を A, B により生成される一般線型群 $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C})$ の部分群とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $BA = AB^3$ を示せ．

(2) A, B の位数をそれぞれ求めよ．

(3) $G = \{A^iB^j \mid i, j$ は 0 以上の整数 $\}$ を示せ．

(4) H_1 を A により生成される G の部分群，H_2 を B により生成される G の部分群とする．このとき，$H_1 \cap H_2 = \{E\}$ を示せ．ただし E は単位行列である．

(5) G の位数を求めよ．

問題 3. 次の問に答えよ．

(1) $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq |y|\}$ に対して，積分値 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$ の $\boldsymbol{R}^2$ における極大点，極小点，鞍点を全て求めよ．

(3) $c > 0$ とする．実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が，任意の $n \geq 0$ に対して $c|a_{n+1}| \leq |a_n|$ を満たすとき，巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < c$ において収束することを示せ．

問題 4. 以下の命題 (i)–(iii) を証明せよ．

(i) 距離空間 (X, d) はハウスドルフ空間である．ただし集合 X は 2 点以上含むとする．

(ii) 1 次元ユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{R}})$ において，整数全体のなす部分集合 $\boldsymbol{Z}$ の相対位相 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Z}}$ は離散位相である．

(iii) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間の間の連続写像とする．X の部分集合 A がコンパクトならば，Y の部分集合 $f(A)$ もコンパクトである．

平成 31 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 30 年 8 月 23 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 J までの 10 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とするが，書ききれない場合は監督者に解答用紙をもらうこと．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書き，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A. 次の問に答えよ．

(1) A を単位元をもつ可換環，I_1 と I_2 をそのイデアルとする．

(a) I_1 と I_2 が互いに素であることの定義を述べよ．

(b) I_1 と I_2 が互いに素であるとき，$I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$ であることを証明せよ．

(c) I_1 と I_2 が互いに素であるとき，次の環の同型を証明せよ．

$$A/I_1I_2 \cong (A/I_1) \times (A/I_2)$$

また，その同型写像をひとつ与えよ．

(2) $A = \boldsymbol{R}[X]/(X^3 - 8)$ とおく．

(a) A は整域でないことを示せ．

(b) $a \in A$ で $a^4 = 1$ となるものの個数を求めよ．

問題 B. $F = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{-1})$，$F_0 = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) F が $\boldsymbol{Q}$ の Galois 拡大であることを示せ．

(2) 拡大次数 $[F_0 : \boldsymbol{Q}]$ と $[F : \boldsymbol{Q}]$ を求めよ．

(3) Galois 群 $\mathrm{Gal}(F/\boldsymbol{Q})$ の構造を決定せよ．

(4) $F/\boldsymbol{Q}$ の中間体 L で $[L : \boldsymbol{Q}] = 4$ であるものの個数を求めよ．

問題 C. 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \boldsymbol{R}\}$ における xy 平面を $H = \{(x,y,0) \mid x,y \in \boldsymbol{R}\}$ とする．$(1,0,0)$ を始点，$(-1,0,0)$ を終点とするふたつの道

$$\ell(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, 0) \quad と \quad m(t) = (\cos \pi t, -\sin \pi t, 0) \qquad (0 \le t \le 1)$$

について，以下の命題 (i)–(iii) を証明せよ．

(i) 道 ℓ と m は H においてホモトープである．

(ii) 道 ℓ と m は $H \setminus \{(0,0,0)\}$ においてホモトープではない．

(iii) 道 ℓ と m は $\boldsymbol{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ においてホモトープである．

問題 D.　次の問に答えよ.

(1) M, N, P をそれぞれ m, n, p 次元の C^∞ 級多様体とする. 2つの C^∞ 級写像 $\phi : M \to N$, $\psi : N \to P$ に対して, 合成 $\psi \circ \phi$ が C^∞ 級であることを示せ.

(2) M を m 次元の C^∞ 級多様体とし, $\gamma : \boldsymbol{R} \to M$ を C^∞ 級写像とする. $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ を, 点 $\gamma(t)$ の近傍で定義された C^∞ 級関数 f に対して

$$\gamma'(t)(f) = \frac{df(\gamma(t))}{dt}$$

によって定めるとき, $\gamma'(t)$ を $\gamma(t) \in U$ である M の局所座標 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ によって局所座標表示せよ.

(3) (2) の状況のもと, $\gamma(\boldsymbol{R}) \subset U$ とする. U 上の 1 次微分形式 dx_i $(i = 1, \ldots, m)$ に対して, 引き戻し $\gamma^*(dx_i)$ を γ の定義域 $\boldsymbol{R}$ の局所座標 t を用いて表せ.

問題 E.

$$f(u, v) = (u + u^2 v, u^2 - uv, v)$$

で定められる曲面 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ に対して, 以下の問に答えよ.

(1) ガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

(2) $\gamma(u) = f(u, 0)$ とする. 曲面 f 上の曲線 γ の測地的曲率と法曲率を求めよ.

(3) 曲面 f の測地線をひとつ求めよ.

(4) 曲面 f に臍点があるかどうか判定し, あれば全て求めよ.

問題 F.　$a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ とする. $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, 正方形

$$K_n = \left\{ z = x + iy \;\middle|\; x, y \in \boldsymbol{R},\ |x|, |y| \le n + \tfrac{1}{2} \right\}$$

の境界を正方向に一周する経路を $C_n = \partial K_n$ とする. $n \ge a$ を満たす自然数 n に対して複素積分

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + a^2} dz$$

を考える. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\pi \cot(\pi z)$ の全ての極を決定し, 各々の極について留数を求めよ.

(2) $z = x + iy$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ のとき, 次を示せ.

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

(3) 十分大きな正の実数 $M > 0$ をとれば, 全ての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $|\cot(\pi z)| \le M$ $(z \in C_n)$ が成立するようにできることを示せ.

(4) 積分 I_n の $n \to \infty$ での極限を考察することにより, 次の等式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \coth(\pi a) - \frac{1}{a^2} \right).$$

問題 G. 次の問に答えよ.

(1) 各 $x \geq 0$ に対して $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定められる実数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は広義単調増加列であることを示せ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} dx$ が存在するかどうか判定し, 存在する場合はその値を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} dx$ が存在するかどうか判定し, 存在する場合はその値を求めよ.

問題 H. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間, X を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された実数値確率変数とし, X の分布は平均 0, 分散 2 の正規分布であるとする. $r, \lambda \in (0, +\infty)$ とするとき, 次の問に答えよ. ただし $\mathbb{E}[\cdot]$ は $\mathbb{P}$ の下での期待値（確率測度 $\mathbb{P}$ に関する Ω 上での積分）を表す.

(1) $\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right]$ を求めよ.

(2) $\mathbb{P}\left[X \geq r\right] \leq e^{-\lambda r}\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right]$ であることを示せ.

(3) $\mathbb{P}\left[X \geq r\right] \leq e^{-r^2/4}$ であることを示せ.

(4) $\mathbb{P}\left[X \geq r\right] \leq \dfrac{1}{2}e^{-r^2/4}$ であることを示せ.

問題 I. 次の C 言語のプログラムについて, 以下の問に答えよ.

```
#include <stdio.h>
int main(void) {
  unsigned char *p;
  int a,i;
  a = 258;
  p = (unsigned char *) &a;
  for (i=0; i<sizeof(int); i++) {
    printf("%02x ",*p); p++;
  }
  return(0);
}
```

(1) このプログラムをある計算機で実行したところ 02 01 00 00 と出力された. このプログラムの仕組みをメモリの図を書いて説明し, このように表示される理由を答えよ.

(2) 2 の補数表現について説明せよ. このプログラムを用いて補数表現を調べるにはどのようにすればよいか?

(3) C 言語の int 型 (整数型) は数学における整数とは異なるものである. この違いを説明せよ.

(4) double 型の数がメモリ内でどのように表現されているか調べるためのプログラムを, このプログラムを参考にして書け.

(5) (数学における) 整数を扱うための C 言語のデータ構造を考案して, 足し算を遂行する関数を書け. どのような考え方のプログラムかの説明も与えよ.

問題 J. $X_1, \ldots, X_n$ を $\{0,1\}$ に値をとる独立な確率変数とし,

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - p, \quad i = 1, \ldots, n$$

とする $(0 < p < 1)$. $X_1, \ldots, X_n$ の和を $X = \sum_{i=1}^n X_i$ とおく. 定数 $a, b \in \boldsymbol{R}$ を適当に選べば, 中心極限定理により, $T = aX + b$ の漸近分布は標準正規分布 $N(0,1)$ となる. このとき, 以下の問に答えよ. ただし, $\Phi(x)$ を標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

とし, $Q(x) = \Phi^{-1}(x)$ を分位点関数とする.

(1) a, b の選び方を説明せよ.

以下, n は十分大きいと見なしてよいものとする.

(2) p に関する仮説

$$\mathrm{H}_0 : \ p = \frac{1}{2}, \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1 : \ p < \frac{1}{2}$$

の有意水準 α $(0 < \alpha < 1)$ の検定を

$$X \leq c \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_0 \text{ を棄却}$$

とする. この検定の検出力が最大になるように c を定めるとき, n と $Q(\alpha)$ を用いて c を表せ. ただし, 半整数補正（連続性補正）は考えなくてもよいものとする.

(3) (2) の検定に対して, $p = \frac{1}{3}$ のときの検出力が β $(0 < \beta < 1)$ 以上となるような n の値の最小値を, $Q(\alpha), Q(\beta)$ を用いて表せ.