平成 30 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 29 年 8 月 22 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とするが，書ききれない場合は監督者に解答用紙をもらうこと．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書き，解答した問題番号を明示すること．

問題 1． 実数 a に対して，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -a^2-1 & a & -1 \\ 1 & -2 & a \\ -a & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

と定める．また，行列 J を

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) $J\,{}^tAJ^{-1} = A$ となるための a の条件を求めよ．ただし ${}^tA$ は A の転置行列である．

(3) a が ${}^tA = A$ をみたすとする．

(i) A の固有値を求めよ．

(ii) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P をひとつ求めよ．また，その時の $P^{-1}AP$ を求めよ．

(iii) 自然数 n に対して，$(AJ)^{2n}$ を求めよ．

問題 2． 次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{Z}' = \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$ とおく．$\boldsymbol{Z}'$ は乗法で群をなすか，理由と共に答えよ．

(2) $\boldsymbol{F}_7 = \boldsymbol{Z}/(7)$ を位数 7 の有限体とする．$\boldsymbol{F}_7$ の乗法群 $\boldsymbol{F}_7^\times$ は巡回群であることを示し，その生成元をひとつ求めよ．

(3) G を群，H をその部分群とする．N が G の正規部分群であるならば，$N \cap H$ は H の正規部分群であることを示せ．

(4) G を位数 500 の巡回群とする．G の元のうち，位数が 2 と互いに素であるものの個数を求めよ．

(5) G を群とする．N を G の指数 k の正規部分群とするとき，任意の $g \in G$ について，$g^k \in N$ であることを示せ．

(6) G を群，S をその部分集合とする．G 上の関係 $\sim$ を，$a, b \in G$ について $a \sim b$ とは $a^{-1}b \in S$ のときとして定める．$\sim$ が G の同値関係であるならば，S は G の部分群であることを示せ．

問題 3. 次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面 $xyz = 1$ 上にあり，原点との距離が最小となる点とその距離を求めよ.

(2) $D = [0,1] \times [0,1]$ として次の積分値を求めよ.

$$\iint_D \frac{\min\{y, \sqrt{x}\}}{1+y^2}\, dxdy.$$

(3) 原点を中心とする巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，収束半径の定義を述べよ．また次のそれぞれの a_n に対して，収束半径を求めよ.

$$\text{(i) } a_n = \sqrt{4^n + 3^n}. \qquad \text{(ii) } a_n = \sqrt{4^n + 3^n} + (-1)^n \sqrt{4^n - 3^n}.$$

問題 4. X を空でない集合とし, $(X, \mathcal{U})$ を $\mathcal{U}$ を位相とする位相空間とする. また, X に属さない点 p に対し, $Y = X \cup \{p\}$ とおき, $\mathcal{O} = \mathcal{U} \cup \{Y\}$ とおく. このとき次の命題 (1)–(4) を証明せよ.

(1) $\mathcal{O}$ は Y の位相である.

(2) $(Y, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間ではない.

(3) $(X, \mathcal{U})$ は $(Y, \mathcal{O})$ の部分空間である.

(4) $(Y, \mathcal{O})$ はコンパクト空間である.

平成 30 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 29 年 8 月 22 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 L までの 12 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とするが，書ききれない場合は監督者に解答用紙をもらうこと．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書き，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A. 2 つの環を $A = Q[x, y]$ と $B = Q[z]/(z^2)$ により定義する．A から B への写像を

$$\phi\colon A \longrightarrow B, \qquad f(x, y) \longmapsto f(1, z) + (z^2)$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) ϕ が環準同型であることを示せ．

(2) $I = \mathrm{Ker}\phi$ とおく．等式 $I = (x-1, y^2)$ を示せ．

(3) B の相異なるイデアルを 3 つ挙げよ．

(4) A のイデアル J で $I \subsetneq J \subsetneq I + (y)$ となるものが存在しないことを示せ．

問題 B. 有理数体 Q 上の多項式 $f(X) = X^6 - 8$ に対し，その最小分解体を F とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(X)$ を複素数体 C 上で 1 次式の積に分解せよ．

(2) 体の拡大次数 $[F : Q]$ を求めよ．

(3) ガロア群 $\mathrm{Gal}(F/Q)$ の構造を求めよ．

(4) 体拡大 F/Q の F, Q 以外の中間体を全て求めよ．

問題 C. n を自然数とする．2 次元球面から互いに交わらない n 個の閉円板の内部を取り除いた曲面を P_n とする．次の問に答えよ．

(1) P_{2n} の境界の $2n$ 個の円周を適当に 2 個ずつ組にし，各組の円周を適当な向きに同一視して得られる閉曲面 X を全て求めよ．

(2) P_3 の境界の 3 個の円周を適当な向きに同一視して得られる商位相空間 Y の基本群とホモロジー群を全て求めよ．

問題 D.

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x|, |y| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

とする. Ω 上の関数 f を

$$f(x, y) = \log\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$$

と定める. 次の問に答えよ.

(1) Ω 上の f のグラフ $\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega\}$ で定まる曲面 S の平均曲率を計算せよ.

(2) 曲面 S のガウス曲率 K を計算せよ.

(3) K の臨界点とその点での K の値を求めよ.

(4) c を $|c| < \pi/2$ をみたす定数とする. $f(x, c)$ $(|x| < \pi/2)$ および $f(c, y)$ $(|y| < \pi/2)$ のグラフの概形を描け.

問題 E. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 + x_3^2,\ x_3^2 + x_1^2,\ x_1^2 + x_2^2)$$

とし, $g = f|_{S^2}$ とする. ただし, S^2 は C^∞ 級多様体 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ である. 次の問に答えよ.

(1) $p \in \boldsymbol{R}^3$ に対して df_p の階数を計算せよ.

(2) $p \in S^2$ に対して dg_p の階数を計算せよ.

(3) f, g の像域の $\boldsymbol{R}^3$ の通常の座標を (X, Y, Z) とする. w を $\boldsymbol{R}^3$ 上の微分形式

$$w = 2Z\,dX + Y^2\,dY$$

とする. g による w の引き戻し g^*w を $p \in S^2$ の局所座標をとり, その局所座標であらわせ.

問題 F. $\mathcal{H}$ は $\boldsymbol{R}$ 上のヒルベルト空間, $x_n, x \in \mathcal{H}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$ の内積 $(\cdot, \cdot)$ から定まる自然なノルムとする. 次の問に答えよ.

(1) $\mathcal{H}$ 上の汎関数 f を $f(y) = (y, x)$ で定義するとき, f は $\mathcal{H}$ 全体で定義された有界線形汎関数で, その作用素ノルムの値は $\|x\|$ に一致することを示せ.

(2) x_n が x に弱収束するとき, $\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ は有界数列であることを示せ.

(3) $\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ が有界数列であるとき, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ であって, すべての $m \in \boldsymbol{N}$ に対して $\lim_{k\to\infty} (x_{n_k}, x_m)$ が存在するものがある. これを示せ.

(4) (3) で得られた $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ に対し $\mathcal{M} = \{y \in \mathcal{H} \mid \lim_{k\to\infty} (x_{n_k}, y)$ が存在 $\}$ とおく. $\mathcal{M}$ の直交補空間を $\mathcal{M}^\perp$ としたとき, $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ を示せ.

問題 G.　複素平面の単位円周を正の向きに一周する曲線を C とする. 次の積分を計算せよ.

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{n-1}(z^2-ab)}{(z-a)(z-b)}dz. \quad (n \in \boldsymbol{Z})$$

ただし, a, b は複素数で $0 < |a| < 1 < |b|$ とする.

問題 H.　次の問に答えよ.

(1) 実数 x に対し $|\sin x| \leq |x|$ が成り立つことを示せ.

(2) $x \neq 0$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\Bigl(\frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x/\sqrt{n}} - 1\Bigr) = -\frac{x^2}{6}$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Bigl(\frac{\sin(x/\sqrt{n})}{x/\sqrt{n}}\Bigr)^n dx = \int_0^1 e^{-x^2/6}\,dx$ が成り立つことを示せ.

問題 I.　$s > 0$ を正の定数とする. $x > 0$ において $u = u(x)$ を未知函数とする微分方程式

$$x\frac{du}{dx} = \frac{s}{2}(1-u^2)$$

を考える. 各 $c \in \mathbb{R}$ に対して, 初期条件 $u(1) = c$ を満たす解が存在するような開区間 $I \ni 1$ で最大のものを $I_c = (\alpha_c, \beta_c)$ で表し, その I_c 上の解を $u_c(x)$ で表す. 次の問に答えよ.

(1) $u_c(x)$ を求めよ.

(2) $I_c = (\alpha_c, \beta_c)$ の右端 β_c が有限な値となるための c の条件を求め, β_c の値を c で表せ.

(3) $I_c = (\alpha_c, +\infty)$ となるための c の条件を求め, そのときの極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} u_c(x)$ を決定せよ.

問題 J.　$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, X, Y を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された実数値確率変数とするとき, 次の問に答えよ. ただし $m \in \boldsymbol{R}$ と $v \in (0, +\infty)$ に対し $N(m, v)$ は平均 m, 分散 v の (1 次元) 正規分布を表すとし, $N(m, v)$ が $\boldsymbol{R}$ 上のボレル確率測度であることは断りなく用いてよいものとする.

(1) X の分布が $N(1, 1)$ であるとき, $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[X^3]$, $\mathbb{E}[X^4]$ を求めよ. ただし $\mathbb{E}[\cdot]$ は $\mathbb{P}$ の下での期待値 (Ω 上での確率測度 $\mathbb{P}$ に関する積分) を表す.

(2) $m_1, m_2 \in \boldsymbol{R}$, $v_1, v_2 \in (0, +\infty)$ とし, X と Y は独立, かつ X の分布は $N(m_1, v_1)$, Y の分布は $N(m_2, v_2)$ であるとする. このとき $X + Y$ の分布を求めよ.

(3) $m \in \boldsymbol{R}$, $v \in (0, +\infty)$ とし, X の分布は $N(0, 1)$ であるとする. このとき $m + \sqrt{v}X$ の分布を求めよ.

(4) $m \in \boldsymbol{R}$, $v \in (0, +\infty)$ とし, $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で次を満たすとする：

$$\text{任意の正の整数 } n \text{ に対し } v_n > 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} m_n = m \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

このとき $\boldsymbol{R}$ 上のボレル確率測度の列 $\{N(m_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $N(m, v)$ に弱収束することを示せ.

問題 K.　次の問に答えよ.

(1) C 言語の double 型の数 a, b に対して a+b と a が等しくなる場合がある. そのような例をあげよ.

(2) 仮数部が 10 進数 N 桁の数, 指数部が int 型で表現される非負の浮動小数点数に対する足し算の関数を C 言語で記述しなさい. ただしこの浮動小数点数は次の構造体で記述するものとする.

```
struct bdouble {
   int e;  // 指数部
   char bigd[N]; // 仮数部
};
```

問題 L. $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元実ベクトル空間とする．$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 V に対して，その直交補空間を $V^\perp$ とする．n 次の正方行列 P が，($V^\perp$ に沿った) V への直交射影行列であるとは，

(i) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
(ii) 任意の $\boldsymbol{x} \in V^\perp$ に対して $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

を満たすことであると定義する．次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \boldsymbol{R}^n$ を1次独立なベクトル，(n,m) 型行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ とするとき，

$$P_A = A(A'A)^{-1}A'$$

は A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の張る部分空間

$$S(A) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n\}$$

への直交射影行列であることを示せ．ただし，行列 X の転置行列を X' で表す．

(2) $S(A)^\perp$ への直交射影行列を Q_A とする．Q_A を P_A をもちいて表せ．

(3) n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \boldsymbol{R}^n$ について，その平均を

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

と書く．$P_{\boldsymbol{1}_n}\boldsymbol{x}$ および $Q_{\boldsymbol{1}_n}\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{1}_n = (1, \ldots, 1)'$ は，要素がすべて 1 である n 次元列ベクトルとする．

(n,p) 型行列 $X = (x_{ij})$ を，n 人に対する p 次元データ行列とし，X の分散共分散行列を $S = (s_{ij})$ とする．ここで，

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

$$s_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k), \quad j,k = 1, \ldots, p$$

である．

(4) S を，X と $Q_{\boldsymbol{1}_n}$ をもちいて表せ．

$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p)' \in \boldsymbol{R}^p$ を，$\|\boldsymbol{a}\| = 1$ なるベクトルとする．X の列ベクトルの $\boldsymbol{a}$ を係数とする線型結合により $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ を

$$y_i = a_1 x_{i1} + \cdots + a_p x_{ip}, \quad i = 1, \ldots, n$$

と定義する．

(5) $\boldsymbol{y}$ の分散

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

を，S と $\boldsymbol{a}$ をもちいて表せ．

(6) $\mathrm{Var}(\boldsymbol{y})$ の最大値と，最大値を与える $\boldsymbol{a}$ を求めよ．