平成29年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成28年8月24日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とするが，書ききれない場合は監督者に解答用紙をもらうこと．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書き，解答した問題番号を明示 すること．

問題 1. $\boldsymbol{R}$-線形空間 $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^5$ の間の線形写像 $f\colon \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^2$ と $g\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^5$ を，それぞれ

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}, \qquad g\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ -7y_1 + 4y_2 \\ -3y_1 \\ 5y_1 + 2y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

で定める．$g \circ f\colon \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^5$ は $\boldsymbol{R}^5$ の線形変換であり，また $f \circ g\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換である．$\boldsymbol{R}^5$, $\boldsymbol{R}^2$ の標準基底に関する $g \circ f$ と $f \circ g$ の表現行列を，順に A, B とする．次の問に答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような 2 次正則行列 P をひとつ求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^5$ の部分空間 $\ker f$ の次元を求めよ．

(4) $v \in \boldsymbol{R}^2$ が $f \circ g$ の固有値 λ の固有ベクトルならば，$w = g(v) \in \boldsymbol{R}^5$ は $g \circ f$ の固有値 λ の固有ベクトルであることを示せ．

(5) A が対角化可能であることを示し，その対角行列を求めよ．

問題 2. p を奇素数とし，$\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ を位数 p の有限体とする．また

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \boldsymbol{F}_p,\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

とおく．次の問に答えよ．

(1) G は行列の積を演算として群になることを示せ．

(2) G の位数を求めよ．

(3) $\boldsymbol{F}_p^{\times} = \boldsymbol{F}_p \setminus \{0\}$ は乗法で群をなす．全射準同型写像 $G \to \boldsymbol{F}_p^{\times}$ を一つ与えよ．

(4) G の正規部分群を 3 つあげよ．

(5) G の位数 p の部分群をひとつ求めよ．

問題 3.　次の問に答えよ.

(1) x のべき級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$ について, 収束半径 ρ を求めよ.

(2) 空間 $\boldsymbol{R}^3$ の単位球面 $\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上で, 関数 $f(x, y, z) = xy$ の最大値, 最小値を求めよ.

(3) 領域 $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ に対して, 次の積分値を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + (x + y)^2} \, dxdy.$$

問題 4.　実数全体の集合を X とする. 各実数 a に対して $U_a = \{x \in X \mid x > a\}$ とおき, X の部分集合族

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, X\} \cup \{U_a \mid a \in X\}$$

を考える. 次の問に答えよ.

(1) $\mathcal{O}$ は X の位相を与えることを示せ.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間かどうか調べよ.

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクト空間かどうか調べよ.

(4) 部分空間 $A = \{x \in X \mid 0 \leq x < 1\}$ はコンパクト空間かどうか調べよ.

(5) 写像 $f : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O})$ を $f(x) = -x$ で定めるとき, f は連続かどうか調べよ.

平成 29 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 28 年 8 月 24 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 M までの 13 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とするが，書ききれない場合は監督者に解答用紙をもらうこと．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書き，解答した問題の記号を明示 すること．

問題 A. $\boldsymbol{C}$ を複素数体とし，1 の原始 3 乗根 $\omega \in \boldsymbol{C}$ をとる．
2 変数多項式環 $\boldsymbol{C}[x,y]$ の $\boldsymbol{C}$-代数としての同型 $\varphi\colon \boldsymbol{C}[x,y] \to \boldsymbol{C}[x,y]$ を $\varphi(x) = \omega x, \varphi(y) = \omega^2 y$ により定める．また，$R \subset \boldsymbol{C}[x,y]$ を

$$R = \{f \in \boldsymbol{C}[x,y] \mid \varphi(f) = f\}$$

により定める．次の問に答えよ．

(1) R は $\boldsymbol{C}[x,y]$ の部分環であることを示せ．

(2) 3 変数多項式環 $\boldsymbol{C}[s,t,u]$ から R への $\boldsymbol{C}$-代数の全射準同型 $\psi\colon \boldsymbol{C}[s,t,u] \to R$ を一つ構成せよ．

(3) 上で構成した ψ について $\ker\psi$ を求めよ．

問題 B. $\boldsymbol{Q}$ を有理数体とし，$\boldsymbol{C}$ を複素数体とする．$\boldsymbol{Q}$ 上の多項式を

$$f(T) = \sum_{i=0}^{16} T^i$$

で定義する．1 の原始 17 乗根 $\zeta \in \boldsymbol{C}$ をとり，$\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ とおく．$\boldsymbol{Q}$ 上 ζ，α で生成される $\boldsymbol{C}$ の部分体を，それぞれ $\boldsymbol{Q}(\zeta)$，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ と書く．次の問に答えよ．

(1) $f(T)$ が ζ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ が $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 拡大であることを示せ．

(3) $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\zeta)/\boldsymbol{Q})$ を求めよ．

(4) $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q})$ を求めよ．

問題 C.　n を 2 以上の整数とする．周および内部からなる正 $2n$ 角形 P_{2n} の $2n$ 本の辺を 2 本ずつ n 組に分け，それぞれの組の 2 辺を貼り合わせて得られる位相空間 F は常に連結な閉曲面になる (証明不要)．次の問に答えよ．

(1) $n=2$ のとき，F として得られる閉曲面は 2 次元球面，トーラス，射影平面，クラインの壷である．その 4 種類の閉曲面を実現する P_4 の辺の貼り合わせ方の例をそれぞれひとつ図示せよ．ただし貼り合わされる辺には同じ番号をつけ，貼り合わせの向きを矢印で表すこと．

(2) $n=3$ のとき，F として得られる閉曲面は 2 次元球面，トーラス，射影平面，クラインの壷と，あと 1 種類ある．その閉曲面は何か答えよ．また，その 5 種類の閉曲面を実現する P_6 の辺の貼り合わせ方の例をそれぞれひとつ図示せよ．

(3) P_{2n} から得られる F のオイラー標数 $\chi(F)$ について，不等式

$$2-n \le \chi(F) \le 2$$

が成り立つことを示せ．

(4) P_{2n} から得られる F について，向き付け可能な閉曲面は何種類あるか．また向き付け不可能な閉曲面は何種類あるか．理由をつけて答えよ．

問題 D.　$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 A, B, C を

$$\begin{aligned} A &= \{(0,0,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid z \in \boldsymbol{R}\}, \\ B &= \{(x,y,0) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}, \\ C &= \{(x,y,0) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (x-2)^2+y^2=1\} \end{aligned}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $X = \boldsymbol{R}^3 \setminus (A \cup B)$ の基本群とホモロジー群を求めよ．

(2) $Y = \boldsymbol{R}^3 \setminus (A \cup C)$ の基本群とホモロジー群を求めよ．

(3) X と Y は同相でないことを示せ．

問題 E.　$\boldsymbol{R}^3$ 上の関数 $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ を $(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$ に対して

$$f(x,y,z) = \cos x + \cos y + \cos z$$

と定める．$S = f^{-1}(0)$ と定める．また，像域の $\boldsymbol{R}$ の座標を u とする．次の問に答えよ．

(1) S は多様体であることを示し，次元を求めよ．

(2) $p=(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $X_p \in T_p\boldsymbol{R}^3$ を $X_p = x\,(\partial/\partial y)_p + y\,(\partial/\partial z)_p$ とする．$df_p(X_p)$ を $(\partial/\partial u)_{f(p)}$ を用いてあらわせ．

(3) $g: S \to \boldsymbol{R}$ を $(x,y,z) \in S$ に対して $g(x,y,z) = z$ と定める．g の臨界点を全て求めよ．

(4) $\boldsymbol{R}$ の微分形式 $\omega = u\,du$ を考える．$f^*\omega$ を dx, dy, dz の一次結合であらわせ．

問題 F. $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面

$$p(u,v) = \Big((a+\cos u)\cos v,\ (a+\cos u)\sin v,\ \sin u\Big), \quad (u,v) \in [0,2\pi) \times [0,2\pi)$$

を考える．ただし a は $a>1$ をみたす実数である．これは円 $\{(a+\cos u, 0, \sin u) \in \boldsymbol{R}^3 \mid u \in [0,2\pi)\}$ を z 軸 (第三座標軸) の周りに 1 回転してできる曲面のパラメーター表示である．定数 $u_0,\ v_0 \in [0,2\pi)$ に対して曲線 $\alpha,\ \beta$ を

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= p\left(u_0,\ \frac{t}{a+\cos u_0}\right), \quad t \in [0, 2\pi(a+\cos u_0)),\\ \beta(t) &= p\,(t,\ v_0)\,, \quad t \in [0,2\pi)\end{aligned}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $a=2$ のとき, 曲面 p を図示せよ．また, その上に $u_0=\pi/2$, $v_0=0$ のときの曲線 α,β を図示せよ．

(2) t は α と β の弧長パラメーターであることを示せ．

(3) p の単位法線ベクトルを求め, ガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ．

(4) α の測地的曲率 κ_g^α と法曲率 κ_n^α を求めよ．

(5) β の測地的曲率 κ_g^β と法曲率 κ_n^β を求めよ．

問題 G. $\boldsymbol{R}$ 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で定義された双線形写像 $q\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \boldsymbol{R}$ が次を満たしているとする: ある $c, C>0$ が存在して，任意の $u,v \in \mathcal{H}$ に対し

$$|q(u,u)| \geq c\|u\|^2, \quad |q(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

が成り立つ．ここで $\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$ の内積 $(\cdot\,,\cdot)$ から定まる自然なノルムとする．次の主張を示せ．

(1) $u \in \mathcal{H}$ とする．このとき，ある $w \in \mathcal{H}$ が一意的に存在して，任意の $v \in \mathcal{H}$ に対し

$$q(u,v) = (w,v)$$

が成り立つ．

以下，この対応 $u \mapsto w$ により写像 $J\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を定める．

(2) 写像 $J\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は線形である．

(3) 写像 $J\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は単射である．

(4) 写像 $J\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ の像は $\mathcal{H}$ 内で稠密である．

問題 H. $-1 < a < 1$, $f(z) = \dfrac{e^{az}}{e^z + 1 + e^{-z}}$ とする. 次の問に答えよ.

(1) $f(z)$ の極と留数をすべて求めよ.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある $M > 0$ が存在し,

$$|\mathrm{Re}\, z| > M \text{ ならば } |f(z)| < \epsilon$$

が成り立つことを示せ.

(3) 実軸上の積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ を計算せよ.

問題 I. f は $\boldsymbol{R}$ 上の非負可測関数で $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} f(x)\,dx = 1$ をみたすものとし, $a > 0$ に対して

$$I_a = \lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} n \log\left(a + \frac{f(x)}{n}\right) dx$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $a > 1$ のとき I_a を求めよ.

(2) $a = 1$ のとき I_a を求めよ.

(3) $a < 1$ のとき I_a を求めよ.

問題 J. 微分方程式 $u''(x) - xu(x) = 0$ の解 $u_1(x)$ と $u_2(x)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} u_1(0) &= 1 \\ u_1'(0) &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 1 \end{cases}$$

を満たすものとする. 次の問に答えよ.

(1) $u_1(x)$ と $u_2(x)$ の原点におけるべき級数展開を求めよ.

(2) $x > 0$ のときに次の不等式が成立することを示せ.

$$\left|u_1(x)\right| \le \cosh\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \qquad \left|u_2(x)\right| \ge \frac{3}{2}x^{-1/2}\sinh\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$$

(3) $u_0(x) = u_1(x) - u_2(x)$ は $x > 0$ で少なくとも一つ零点を持つことを示せ.

問題 K. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間，n を正の整数とする．各 $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し，$p_k \in [0,1]$ とし，また X_k は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された実数値確率変数で $\mathbb{P}[X_k = 1] = p_k$ かつ $\mathbb{P}[X_k = 0] = 1 - p_k$ であるとする．さらに $\{X_k\}_{k=1}^n$ は独立であると仮定し，$Y = \sum_{k=1}^n X_k$, $\mu = \mathbb{E}[Y]$ とおく．次の問に答えよ．ただし $\mathbb{E}[\,\cdot\,]$ は $\mathbb{P}$ の下での期待値（Ω 上での確率測度 $\mathbb{P}$ に関する積分）を表す．

(1) μ を $p_1, \ldots, p_n$ を用いて表せ．

(2) s を実数とし，$k \in \{1, \ldots, n\}$ とする．このとき $\mathbb{E}\big[e^{sX_k}\big]$ を s と p_k を用いて表し，さらに

$$\mathbb{E}\big[e^{sX_k}\big] \leq \exp\big(p_k(e^s - 1)\big)$$

であることを示せ．

(3) s を実数とする．このとき

$$\mathbb{E}\big[e^{sY}\big] \leq \exp\big(\mu(e^s - 1)\big)$$

であることを示せ．

(4) δ を $0 < \delta < 1$ を満たす実数とし，$s = \log(1 - \delta)$ とおく．このとき

$$\mathbb{P}\big[e^{sY} \geq e^{s(1-\delta)\mu}\big] \leq e^{-s(1-\delta)\mu}\mathbb{E}\big[e^{sY}\big]$$

であることを示し，さらに

$$\mathbb{P}\big[e^{sY} \geq e^{s(1-\delta)\mu}\big] \leq \exp\Big(-\mu\big((1-\delta)\log(1-\delta) + \delta\big)\Big)$$

であることを示せ．

(5) $0 \leq x < 1$ を満たす実数 x に対し

$$(1-x)\log(1-x) + x \geq \frac{x^2}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(6) δ を $0 < \delta < 1$ を満たす実数とする．このとき

$$\mathbb{P}\big[Y \leq (1-\delta)\mu\big] \leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{2}\mu\right)$$

が成り立つことを示せ．

問題 L. 次の問に答えよ.

(1) sizeof(char *) の値が 4 である C 言語処理系において次のプログラムの出力はどうなるか? 理由も含めて説明せよ.

```
main() {  printf("%d\n",sizeof(int *)); }
```

(2) 係数体が $Z/2Z$ である 1 変数の多項式を表現するためのデータ構造を構造体を用いて定義し, その多項式の足し算をおこなう C 言語のプログラムを書け. ただし多項式の次数は int 型データの範囲を越えないものとする. 用いたデータ構造やアルゴリズムについて説明も加えること.

問題 M. X_1, X_2, X_3, X_4 を，成功確率 θ $(0 \le \theta \le 1)$ のベルヌーイ分布に従う互いに独立な確率変数とする．θ の推定に関する次の問に答えよ．

(1) $\hat{\theta} = X_1$ が不偏推定量であることを示し，分散 $V(\hat{\theta})$ を求めよ．

(2) θ の最小十分統計量 $T(X_1, \ldots, X_4)$ を求めよ．また，T のしたがう確率分布は何か，答えよ．

(3) 新たな推定量を $\hat{\theta}^* = \mathbb{E}[\hat{\theta} \,|\, T]$ で定義する．$\hat{\theta}^*$ を T の関数として求めよ．また，$\hat{\theta}^*$ の不偏性について述べ，分散 $V(\hat{\theta}^*)$ を求めよ．

(4) フィッシャー情報量を計算し，$\hat{\theta}^*$ が最良の不偏推定量であること，すなわち $V(\hat{\theta}^*)$ がクラーメル・ラオの下限を達成することを示せ．