平成 28 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 27 年 8 月 19 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とするが，書ききれない場合は監督者に解答用紙をもらうこと．すべての解答用紙に名前を書き，解答した問題番号を明示すること．

問題 1.　対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P をひとつ求めよ．またそのときの $P^{-1}AP$ を求めよ．

(4) 実数を成分とする n 次対称行列の固有値は全て実数であることを示せ．

問題 2.　[1] G を群とする．以下の問に答えよ．

(1) H, H' が G の部分群のとき，$H \cap H'$ も G の部分群であることを示せ．

(2) H を G の部分群，N を G の正規部分群とする．

$$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$$

とおくと，これは G の部分群であることを示せ．

(3) G' を群，$f\colon G \to G'$ を群の準同型写像とする．H' が G' の部分群ならば，$f^{-1}(H')$ は G の部分群であることを示せ．

[2] 以下の問に答えよ．

(1) $G = (\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}) \oplus (\boldsymbol{Z}/5\boldsymbol{Z})$ は巡回群であることを示せ．また，G の生成元となるような $g \in G$ が何個あるか求めよ．

(2) m, n を正の整数で互いに素でないとするとき，$G = (\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}) \oplus (\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ は巡回群でないことを示せ．

問題 3. 以下の問に答えよ.

(1) 2 変数関数 $f(x,y) = 2e^{3x} - 6e^x \cos y - 3\cos^2 y$ の $\boldsymbol{R}^2$ 内の極大点・極小点・鞍点を全て求めよ.

(2) 領域を $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$ と定める. 次の積分値を求めよ.

$$I = \iint_D (x^3 - 3xy^2)\,dxdy.$$

(3) 関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\log(1+x)} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

の $x = 0$ におけるテーラー展開を x^3 の係数まで求めよ（$f(x)$ が原点の近傍で C^∞ 級になることは用いても良い）.

問題 4. X をコンパクト空間, Y をハウスドルフ空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. (1)–(3) の空欄に当てはまる記号を書け. また (4) について答えよ.

(1) X の任意の閉集合 F はコンパクトであることを示そう.

F の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える. $X \setminus F$ は開集合なので, $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ は X の開被覆となる. X はコンパクトなので, $\mathcal{U}^*$ に属する有限個の開集合 $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_n}, X \setminus F$ によって X は被覆される. したがって $\boxed{\qquad\qquad}$ によって F は被覆されるので, F はコンパクトである.

(2) X の任意のコンパクト部分集合 A に対して, f による像 $f(A)$ は Y のコンパクト部分集合であることを示そう.

$f(A)$ の任意の開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\mu\}_{\mu \in M}$ を考える. f は連続写像なので, $f^{-1}(V_\mu)$ は X の開集合である. $\mathcal{V}$ は $f(A)$ の開被覆なので, $\widetilde{\mathcal{V}} = \{f^{-1}(V_\mu)\}_{\mu \in M}$ は A の開被覆である. A はコンパクトなので, $\widetilde{\mathcal{V}}$ に属する有限個の開集合 $f^{-1}(V_{\mu_1}), f^{-1}(V_{\mu_2}), \ldots, f^{-1}(V_{\mu_m})$ によって A は被覆される. したがって $\boxed{\qquad\qquad}$ によって $f(A)$ は被覆されるので, $f(A)$ はコンパクトである.

(3) Y の任意のコンパクト部分集合 B は Y の閉集合であることを示そう.

$Y \setminus B$ に属する任意の点 p を考える. B の各点 b に対して $p \neq b$ であることに注意する. Y はハウスドルフ空間なので, Y の開集合 O_b と W_b が存在して, $O_b \ni p$, $W_b \ni b$, $O_b \cap W_b = \emptyset$ をみたす. $\mathcal{W} = \{W_b\}_{b \in B}$ は B の開被覆であり, B はコンパクトなので, $\mathcal{W}$ に属する有限個の開集合 $W_{b_1}, W_{b_2}, \ldots, W_{b_k}$ によって B は被覆される. このとき $O = \bigcap_{i=1}^k O_{b_i}$, $W = \bigcup_{i=1}^k W_{b_i}$ とおくと, O と W は Y の開集合で $O \cap W = \emptyset$, $O \ni \boxed{\quad}$, $W \supset B$ をみたす. よって p は $Y \setminus B$ の内点である. これが任意の点 p に対して成り立つので, $Y \setminus B$ は Y の開集合, すなわち B は Y の閉集合である.

(4) f が全単射連続写像のとき, f は同相写像であることを示せ.

平成 28 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 27 年 8 月 19 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A. u, v, t, x, y を不定元とし，実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の多項式環 $\boldsymbol{R}[u,v,t]$ および $\boldsymbol{R}[x,y]$ を考える．写像 $\varphi : \boldsymbol{R}[u,v,t] \to \boldsymbol{R}[x,y]$ を

$$\varphi(u) = x + y, \quad \varphi(v) = xy, \quad \varphi(t) = x$$

で定まる $\boldsymbol{R}$ 上の環準同型写像とする．以下の問に答えよ．

(1) $\ker \varphi$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}[u,v,t]$ のイデアル $I_{(a,b)} := (u-a, v-b)$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ に対し，$\varphi(I_{(a,b)})$ が生成する $\boldsymbol{R}[x,y]$ のイデアルが素イデアルになるための a, b に関する条件を求めよ．

問題 B. $P(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ を有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上の 4 次既約多項式とし，$P(X)$ の複素数体 $\boldsymbol{C}$ 内の異なる 4 つの根を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする．$F = \boldsymbol{Q}(\alpha, \beta)$ について $\gamma, \delta \in F$ であるとする．このとき F は $P(X)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体なので，$F/\boldsymbol{Q}$ は Galois 拡大である．この Galois 群を G とする．以下の問に答えよ．

(1) $[F : \boldsymbol{Q}(\alpha)] \leq 3$ を示せ．

(2) $[F : \boldsymbol{Q}]$ は 4, 8, 12 のいずれかであることを示せ．

(3) $[F : \boldsymbol{Q}] = 4$ のとき，$F/\boldsymbol{Q}$ には $F, \boldsymbol{Q}$ 以外の中間体が存在することを示せ．

(4) $[F : \boldsymbol{Q}] = 4$ で，G が巡回群にならないような $P(X)$ は存在するか．存在するならばそのような $P(X)$ の例をあげ，存在しなければそのことを示せ．

(5) $[F : \boldsymbol{Q}] = 8$ のとき，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ から $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ への，恒等写像でない $\boldsymbol{Q}$-準同型写像が唯一つ存在することを示せ．

問題 C. k を 正の整数とする．ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$S_k = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^k = 1\}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) S_k が微分可能多様体であることを示し，次元を求めよ．

(2) S_k がコンパクトであるための必要十分条件を k であらわせ．

(3) 関数 $g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ を $g(x,y,z) = y$ と定め，S_k 上の関数 h を g の制限 $h = g|_{S_k}$ で定める．h の臨界点を全て求めよ．

問題 D. xy 平面において, A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1) を頂点とする正方形

$$S=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$$

を考える. 辺 AB から辺 CD への写像 f と辺 DA から辺 BC への写像 g が次の (1)–(3) の場合に, 正方形 S から写像 f と g によって辺を同一視して得られる位相空間 X の基本群 $\pi_1(X)$ とホモロジー群 $H_n(X)$ $(n=0,1,2)$ をそれぞれ求めよ.

(1) $f(x,0)=(x,1)$, $g(0,y)=(1,y)$.

(2) $f(x,0)=(x,1)$, $g(0,y)=(1,1-y)$.

(3) $f(x,0)=(1-x,1)$, $g(0,y)=(1,1-y)$.

問題 E. 平面曲線 $\gamma:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\gamma(t)=(t,t^2+1)$ と定め, 回転面 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$ を $(t,\theta)\in\boldsymbol{R}^2$ に対して $g(t,\theta)=\big((t^2+1)\cos\theta,(t^2+1)\sin\theta,t\big)$ と定める. 以下の問に答えよ.

(1) γ の曲率を t であらわせ.

(2) g のガウス曲率 K と平均曲率 H を t,θ であらわせ.

(3) $a,b\in\boldsymbol{R}$ を定数とする. 曲線 $c:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $c(t)=(t,a)$ とし, 曲線 $d:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $d(\theta)=(b,\theta)$ とする. c と d が g の曲率線であることを示せ.

問題 F. K を $(0,1)\times(0,1)$ 上の有界可測関数とし, $M=\sup\{|K(x,y)| \mid (x,y)\in(0,1)\times(0,1)\}$ とする. また, $u\in L^1(0,1)$ に対し,

$$(\mathcal{K}u)(x)=\int_0^x K(x,y)u(y)\,dy,\quad x\in(0,1)$$

と定義する. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の $\varphi\in L^1(0,1)$ と, 正の整数 n に対し,

$$|(\mathcal{K}^n\varphi)(x)|\le \frac{M^n x^{n-1}}{(n-1)!}\|\varphi\|_{L^1},\quad x\in(0,1)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f\in L^1(0,1)$ とする. このとき,

$$u=f+\mathcal{K}u$$

を満たす $u\in L^1(0,1)$ が存在することを示せ.

(3) (2) の $u\in L^1(0,1)$ は一意的であることを示せ.

問題 G.　以下の問に答えよ．n を正の整数とする．

(1) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^{2n}}$ について，極とその留数をすべて求めよ．

(2) $a > 0$ として，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^{2n}}dx$ を計算せよ．

問題 H.　f は $\boldsymbol{R}$ 上定義された実数値可積分関数とする．

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}} \frac{f(x)^{2n}}{1+f(x)^{2n}}\,dx = \mu\bigl(\{x \mid |f(x)| > 1\}\bigr) + \frac{1}{2}\mu\bigl(\{x \mid |f(x)| = 1\}\bigr)$$

を示せ．ただし，μ は $\boldsymbol{R}$ 上の Lebesgue 測度である．

問題 I.　$\alpha, \beta \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ を $\alpha \neq \beta$ をみたす定数として，$w = w(x)$ を未知関数とする次の微分方程式を考える．

$$w'' - 3ww' + w^3 + (\alpha+\beta)(w^2 - w') + \alpha\beta w = 0 \qquad (*)$$

ここで，w', w'' は dw/dx, d^2w/dx^2 を表す．以下の問に答えよ．

(1) $w = -u'/u$ によって未知関数を変換するとき，$u = u(x)$ の満たすべき微分方程式を求めよ．

(2) 上記の微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

問題 J.　$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間，X, Y を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された実数値確率変数とし，X と Y は独立かつ $X+Y$ の分布は X の分布に等しいと仮定する．このとき以下の問に答えよ．ただし $\mathbb{E}[(\cdot)]$ は $\mathbb{P}$ の下での期待値（Ω 上での積分）を，i は虚数単位を表す．

(1) y を実数とする．このとき任意の実数 t に対し $2 - e^{ity} - e^{-ity}$ が非負の実数であることを示し，極限

$$\lim_{t\to 0} \frac{2 - e^{ity} - e^{-ity}}{t^2}$$

を求めよ．

(2) 正の整数 N で

$$\mathbb{P}\bigl[|X| \le N\bigr] > \frac{2}{3}$$

を満たすものが存在することを示せ．

(3) N を正の整数，t を $|t| \le \dfrac{\pi}{3N}$ を満たす実数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\mathbb{E}[\cos(tX)] \ge \frac{3}{2}\mathbb{P}\bigl[|X| \le N\bigr] - 1.$$

(4) N を $\mathbb{P}\bigl[|X| \le N\bigr] > \dfrac{2}{3}$ を満たす正の整数とし（上記 (2) によりそのような N は存在する），t を $|t| \le \dfrac{\pi}{3N}$ を満たす実数とする．このとき

$$\mathbb{E}[e^{itY}] = 1$$

であることを示せ．

(5) $\mathbb{E}[Y^2] = 0$ であることを示せ．

(6) $\mathbb{P}\bigl[Y = 0\bigr] = 1$ であることを示せ．

問題 K.　以下の問に答えよ.

(1) sizeof(int) の値が 4 である C 言語処理系において次のプログラムの出力はどうなるか, 理由も含めて説明せよ.

```
main() {  int a,b;  a = 0x80000000; b = 0x7ffffffe; printf("%d\n",a+b); }
```

(2) 上の問題で見たように C 言語の int 型では大きな整数を扱うことができない. 大きな整数を表現するデータ構造を定義し, その整数の掛け算をおこなう C 言語のプログラムを書け. 用いたデータ構造やアルゴリズムについての説明も加えること.