平成 27 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 26 年 8 月 25 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 5 の 5 問 に解答せよ. 解答用紙は 1 問につき 1 枚とし, 解答した問題番号を明示すること.

問題 1. 複素数 a, b, c に対し, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

と定める. 行列 A に関する以下の問に答えよ.

(1) 行列式を求めよ.

(2) 固有多項式を求めよ.

(3) $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおく. ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルであることを示せ.

(4) 固有値を全て求めよ（重複があってもよい）.

(5) 固有値が 1 のみであるような A を全て求めよ.

問題 2. p を素数とする. $G = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ で群 G を定める. 以下の問に答えよ.

(1) 群 G の位数を求めよ.

(2) 群 G において, 位数 p の元の個数を求めよ.

(3) 位数が p の群は巡回群であることを示し, その生成元の個数を求めよ.

(4) 群 G において, 位数 p の部分群の個数を求めよ.

問題 3. 領域 $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x > \pi/2\}$ 上の関数 f を

$$f(x, y) = e^{-y^2} x^{-2} \sin x, \quad (x, y) \in D,$$

で定義する. 以下の問に答えよ.

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ.

(2) 方程式

$$x = 2\tan x, \quad x > \frac{\pi}{2}$$

は各区間 $(n\pi, n\pi + \pi/2)$, $n = 1, 2, \ldots,$ に解 $x = a_n$ をただ一つだけ持つことを示せ. さらに半無限区間 $(\pi/2, \infty)$ ではこれらの a_n 以外には解を持たないことも示せ.

(3) 数列 a_n, $n = 1, 2, \ldots,$ を (2) のように定める. 関数 f は点 $(a_n, 0) \in D$ において極値をとることを示せ. また f が D 上で極値をとるのはこれらの $(a_n, 0)$ に限ることも示せ.

問題 4. 任意のベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して, $F(v)$ を

$$F(v) = \iint_B \frac{(ax+by)^2}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

で定義する. ただし $B = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2+y^2<1\}$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) $F(v)$ は $v \in \boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とする回転に関して不変であることを示せ, すなわち $\boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とする角度 φ の回転に対応する行列 $R(\varphi)$ に対して $F(R(\varphi)v) = F(v)$ が成り立つことを示せ.

(2) 積分 $F(v)$ を計算せよ.

問題 5. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A に対して, 開集合系 $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{U} = \{U_\lambda \in \mathcal{O} \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ が $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ をみたすとき, $\mathcal{U}$ を A の開被覆という. また, A の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, 有限個の開集合 $U_{\lambda(1)}, U_{\lambda(2)}, \ldots, U_{\lambda(n)} \in \mathcal{U}$ が存在して $\{U_{\lambda(i)} \,|\, i = 1,2,\ldots,n\}$ が A の開被覆となるとき, A はコンパクトであるという. $\boldsymbol{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{R}$ の閉区間 $I = [0,1]$ がコンパクトであることを次のように示した. 空欄 $\boxed{(ア)}$ および $\boxed{(イ)}$ に当てはまるものを答えよ.

(証明) $\mathcal{U}$ を I の開被覆とする. $\mathcal{U}$ の任意の有限部分集合が I の開被覆ではないと仮定して矛盾を導く. 帰納的に閉区間 $[a_n, b_n]$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ を以下のように定義する. $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ とおく. ふたつの閉区間

$$\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right], \quad \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$$

のうち, 少なくとも一方は $\mathcal{U}$ の有限部分集合で被覆されない. その閉区間をひとつ選んで $[a_1, b_1]$ とおく. このとき $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}$ である. 同様に閉区間 $[a_n, b_n]$ が定義されたとき, ふたつの閉区間

$$\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], \quad \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$$

のうち, 少なくとも一方は $\mathcal{U}$ の有限部分集合で被覆されない. その閉区間をひとつ選んで $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ とおく. このとき $b_n - a_n = \boxed{(ア)}$ である. よって,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

をみたす実数 $c \in I$ がただ一つ存在する. $\mathcal{U}$ が I の開被覆であることと $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ より, $[a_N, b_N] \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U$ をみたす開集合 $U \in \mathcal{U}$, 実数 $\varepsilon > 0$, および自然数 N が存在する. したがって閉区間 $[a_N, b_N]$ は $\mathcal{U}$ の有限部分集合 $\left\{\boxed{(イ)}\right\}$ で被覆されることになり, a_n, b_n の定義に矛盾する. (証明終)

(2) $\boldsymbol{R}$ の開区間 $J = (0,1)$ はコンパクトでないことを示せ.

(3) I と J は同相でないことを示せ.

平成 27 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 26 年 8 月 25 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A. $A=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in \boldsymbol{Z}\}\subset \boldsymbol{R}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) A は $\boldsymbol{R}$ の部分環であることを示せ．

(2) A の単数群 (可逆元全体のなす群)$A^\times$ が無限群であることを示せ．

(3) $I=(2)\subset A$ を 2 が生成する A のイデアルとする．剰余環 A/I の加法と乗法の演算表を書き，A/I が体かどうか答えよ．

(4) $J=(7)$ とする．A/J が何個の元からなるか答えよ．また体かどうか答えよ．

問題 B. 以下の問に答えよ．

(1) 実数 $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

(2) $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 拡大であることを示せ．

(3) Galois 群 $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q})$ を群構造を含め決定せよ．

(4) $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ に含まれる $\boldsymbol{Q}$ の 2 次拡大をすべて求めよ．ただし答えは $\boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$ $(m\in\boldsymbol{Z})$ の形に表現すること．

問題 C. M をリーマン多様体とし TM をその接束とし，$\Gamma(TM)$ を TM の切断とする．リーマン計量を $\langle\ ,\ \rangle$ であらわし，ブラケット積を $[\ ,\ ]$ であらわす．$\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ を，任意の $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ に対して

$$\langle Z,\nabla_Y X\rangle=\frac{1}{2}\Big(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle\Big)$$

をみたす写像とする．以下の問に答えよ．

(1) $M=\boldsymbol{R}^2$ とし，$\boldsymbol{R}^2$ の標準的な座標を (x,y) とする．$X=\partial_x$, $Y=\partial_x+x\partial_y$ のとき，関数 $f:M\to\boldsymbol{R}$ に対して $[X,Y](f)$ を計算せよ．

(2) 任意の $X,X_1,X_2,Y,Y_1,Y_2\in\Gamma(TM)$ と任意の M 上の関数 f,g に対して次を示せ．

(a) $\nabla_{fY_1+gY_2}X=f\nabla_{Y_1}X+g\nabla_{Y_2}X$,

(b) $\nabla_Y(X_1+X_2)=\nabla_YX_1+\nabla_YX_2$,

(c) $\nabla_Y(fX)=f\nabla_YX+Y(f)X$,

(d) $Y\langle X_1,X_2\rangle=\langle\nabla_YX_1,X_2\rangle+\langle X_1,\nabla_YX_2\rangle$,

(e) $\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]$.

(3) $\widehat{\nabla}:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ を (2) の 5 つの条件をみたす接続とする．このとき $\widehat{\nabla}=\nabla$ を示せ．

問題 D. 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 A, B, C, D を次で定める.

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, (x+2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\
B &= \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\
C &= \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\
D &= \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, -6 \le x \le 4,\ y = z = 0\}.
\end{aligned}$$

$X = A \cup B \cup C \cup D$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) X の概形を描け.

(2) X はいくつかの円周および球面の一点和とホモトピー同値になることを示せ.

(3) X の基本群およびホモロジー群を求めよ.

問題 E. U を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合とし, $f : U \to \boldsymbol{R}^3$ を曲面 (はめこみ) とする. U の座標を (u,v) とする. ただし, 任意の定数 u_0, v_0 に対して $u \mapsto f(u, v_0)$, $v \mapsto f(u_0, v)$ は互いに直交する f の曲率線である. 以下の問に答えよ.

(1) f の (u,v) に関する第一基本形式, 第二基本形式をそれぞれ $E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$, $L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$ とするとき, 任意の (u,v) に対して $F(u,v) = M(u,v) = 0$ を示せ.

(2) $f(u,0) = (\cos u, \sin u, 0)$ とする. このとき, ある球面 S が存在して f と S は $f(u,0)$ 上で接することを示せ.

問題 F. $(0,\infty) \times \boldsymbol{R}$ 上の関数 G は,

$$G(t,x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}$$

で与えられるものとする. $t > 0$, $g \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ に対して, $\boldsymbol{R}$ 上の関数 $G(t) * g$ を

$$(G(t) * g)(x) = \int_{\boldsymbol{R}} G(t, x-y) g(y)\, dy$$

で定める. ここで, $\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ 上の急減少関数全体のなす空間である. 以下の問に答えよ.

(1) $t > 0$, $g \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ に対して,

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}} |(G(t) * g)(x)| \le \sup_{x \in \boldsymbol{R}} |g(x)|$$

が成立することを示せ.

(2) $f \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ とする. $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, $\boldsymbol{R}$ 上の関数 u_n を

$$u_n(x) = \int_{1/n}^{n} e^{-t} (G(t) * f)(x)\, dt$$

で定める. このとき, 関数列 $\{u_n\}$ は $\boldsymbol{R}$ 上一様収束することを示せ.

(3) 関数列 $\{u_n\}$ の極限を u と表すとき, $\boldsymbol{R}$ 上で

$$u(x) - u''(x) = f(x)$$

が成立することを示せ.

問題 G. ρ を正の数とし, 複素平面内の曲線 C_ρ を原点を始点とし $\{z=x+iy \mid (x-\rho)^2+y^2=\rho^2\}$ に沿って正の向きに進んで原点に戻る閉曲線と定める. 以下の問に答えよ.

(1) $n=0,1,2,\ldots$ として $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_\rho} z^n e^{1/z}dz = \dfrac{1}{(n+1)!}$ を示せ.

(2) $t>0$ として $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_\rho} \dfrac{e^{t/z}}{1-z}dz$ を求めよ.

問題 H. f は $\boldsymbol{R}$ 上定義された非負な連続関数で, $\boldsymbol{R}$ 上可積分であるとする. 以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\boldsymbol{R}} f(n^2x)\,dx < \infty$ であることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ は概収束し, その和は可積分であることを示せ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$ が可積分なら f は定数 0 に等しいことを示せ.

問題 I. 以下の問に答えよ.

(1) 未知関数 $y(x)$ に関する微分方程式

$$y''(x)+p(x)y'(x)+\frac{2}{x}y(x)=0$$

が $y(x)=e^x$ を 1 つの解にもつとき, 係数関数 $p(x)$ および一般解を求めよ.

(2) n を非負整数とする. 関数 e^x の $x=0$ におけるテイラー展開の $n+1$ 次以上の項を零として得られる n 次多項式を $f(x)$ とする. e^x と $f(x)$ を解とする 2 階の微分方程式を

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$$

とするとき, 係数関数 $a(x)$, $b(x)$ を求めよ.

問題 J. X, Y は独立で同じ分布を持つ非負の確率変数とする. また,

$$Z=\min\{X,Y\}$$

と置く. 以下の問に答えよ.

(1) X の期待値が有限 ($EX<\infty$) のとき, Z の期待値 EZ も有限な事を示せ.

(2) X の期待値が有限 ($EX<\infty$) のとき, Z^2 の期待値 EZ^2 も有限な事を示せ.

(3) X がパラメータ 1 の指数分布のとき $P(Z\geq a)$ を求めよ. $a>0$ とする.

問題 K. 図 2 のプログラム add.c は, C 言語の構造体を用いて任意桁の自然数を表現し足し算を行う. たとえば十進数 123456 は, 図 1 のように表現される. 以下の問に答えよ.

(1) int 型の変数をメモリに格納する形式である 1 の補数表現について説明せよ.

(2) 関数 print_bnum がどのように動作するか説明せよ.

(3) プログラム add.c がどのように動作するか, メモリの様子を図に書いて説明せよ.

(4) int 型の自然数を struct bnum での表現に変換するプログラムを書け.

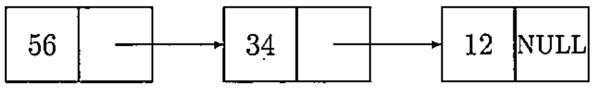

図 1: 123456 の表現

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 100
struct bnum {
  int p;
  struct bnum *next;
};
struct bnum *new_bnum(int n) {
  struct bnum *t;
  t = (struct bnum *)malloc(sizeof(struct bnum));
  t->p = n; t->next=NULL;
  return(t);
}
void print_bnum(struct bnum *x) {
  if (x == NULL) return;
  print_bnum(x->next); printf("%02d ",x->p);
}
struct bnum *add(struct bnum *x,struct bnum *y) {
  struct bnum root;
  struct bnum *z;
  struct bnum *t;
  int carry=0;
  root.next=NULL; z = &root;
  while ((x != NULL) || (y != NULL)) {
    if (x == NULL) {t=y; y=x; x=t;}
    t = new_bnum(0); z->next=t;
    if (y != NULL) t->p = carry+(x->p)+(y->p);
        else t->p = carry+(x->p);
    carry = (t->p)/N;
    t->p = (t->p) % N;
    z = t;
    if (y != NULL) y=y->next;
    x=x->next;
  }
  if (carry) {t = new_bnum(carry); z->next=t;}
  return(root.next);
}
main() {
  struct bnum *a;
  struct bnum *b;
  a = new_bnum(99);   b = new_bnum(99);
  b = add(a,b);  b = add(a,b);
  print_bnum(b); printf("\n");
}
```

図 2: add.c