練習問題 6 解答

練習 6.1 【チェビシェフ (Tchebyshev) の不等式】

確率変数 X の平均を μ，分散を σ^2 とするとき，

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

が成り立つ．これを X が有限個の値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を取る確率変数の場合に証明しよう．

まず，分散の定義の式から出発する．

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(|X-\mu|^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j-\mu|^2 P(X=x_j) \\
&= \sum_{j:|x_j-\mu|\geq k\sigma} |x_j-\mu|^2 P(X=x_j) + \sum_{j:|x_j-\mu|<k\sigma} |x_j-\mu|^2 P(X=x_j) \\
&\geq k^2\sigma^2 \sum_{j:\boxed{\text{（ア）}}} P(X=x_j) \\
&= k^2\sigma^2 P(|X-\mu| \geq \boxed{\text{（イ）}})
\end{aligned}$$

左辺は X の分散だから σ^2 に等しいので，これより

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

がわかる．

（ア）の答 $|x_j-\mu| \geq k\sigma$

（イ）の答 $k\sigma$

練習 6.2 母集団が平均 208，標準偏差 $\sigma = 14$ の正規分布に従うとき，4 つの標本 $199, 215, 191, 179$ を得た．この標本の標本平均は $\boxed{\text{（ウ）}}$ である．もう一度大きさ 4 の標本 X_1, X_2, X_3, X_4 をとる．正規分布の母集団からの標本なので，

$$\bar{X} = \frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$$

も正規分布に従い，プリントの定理 3.1 より平均は 208 で，分散は $\boxed{\text{（エ）}}$ で標準偏差は $\sqrt{\boxed{\text{（エ）}}}$ である．したがって

$$Z = \frac{\bar{X}-208}{\sqrt{\boxed{\text{（エ）}}}}$$

は標準正規分布に従う．$\bar{X} \leq \boxed{\text{（ウ）}}$ となる確率を求めたい． Z の言葉に直すとこれは

$$Z \leq \frac{\boxed{\text{（ウ）}}-208}{\sqrt{\boxed{\text{（エ）}}}}$$

となる確率を求めることと同じで，右辺を小数点以下 *3* 桁目を四捨五入して計算すると $\boxed{\text{（オ）}}$となるから，標準正規分布表をつかって計算すると，この確率は $\boxed{\text{（カ）}}$ となる．

解答　標本の大きさは 4 だから標本平均は

$$(199+215+191+179) \times \frac{1}{4} = 196$$

（ウ）の答 196

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{4} = \frac{14^2}{4} = 49$$

となる.

（エ）の答 49

$$\frac{196-208}{\sqrt{49}} = -\frac{12}{7} = -1.71 \quad \text{（小数点以下第 3 位を四捨五入）}$$

（オ）の答 -1.71

Z は標準正規分布に従うので,

$$P(Z \leq -1.71) = P(1.71 \leq Z) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.71)$$

で,

$$P(Z \geq 1.71) = 0.4564$$

なので $P(Z \leq -1.714) = 0.0436$

（カ）の答 0.0436