

練習問題 5 の解答

練習 5.1 A 地から B 地へのバスの運行が時間通りなら $X = 0$, そうでなければ $X = 1$ とする. また, 運行中に渋滞に遭遇するなら, $Y = 1$ とし, そうでなければ $Y = 0$ とする. 調べてみたら X と Y の同時分布は次の表のようになった.

$X \setminus Y$	0	1
0	0.75	0.05
1	0.15	0.05

X の周辺分布については,

$$P(X = 0) = \boxed{\text{(ア)}}, \quad P(X = 1) = 1 - \boxed{\text{(ア)}}$$

であり, Y の周辺分布については

$$P(Y = 0) = \boxed{\text{(イ)}}, \quad P(Y = 1) = 1 - \boxed{\text{(イ)}}$$

が分かる. これより X と Y は独立か否かを判定せよ.

(ア) の答 0.80

(イ) の答 0.90

X と Y は独立か?

$$P(X = 0)P(Y = 0) = 0.8 \times 0.9 = 0.72 \neq 0.75 = P(X = 0, Y = 0)$$

答 X と Y は独立でない。従属。

講評 (ア) と (イ) では 0.8, 0.9 と書いてもいいですが, 小数点以下 2 桁目まで信用できると考えて答も小数点以下 2 桁目まで書くのが普通です. 最後の問題では「従属」という言葉を講義では言わなかったので, 混乱した人もいた様です. プリントには書いていたのですが, X, Y が独立でないとき X, Y は「従属」であるといえます.

練習 5.2 1. 確率変数 X, Y と実数 a, b について

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \tag{1}$$

を示す. X が x_1, \dots, x_n の値をとり, Y が y_1, \dots, y_m の値をとるものとしておく. $X = x_i, Y = y_j$ のとき $aX + bY = ax_i + by_j$ だから

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (ax_i + by_j) P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i \sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{j=1}^m by_j \sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i P(X = \boxed{\text{(ウ)}}) + b \sum_{j=1}^m y_j P(Y = \boxed{\text{(エ)}}) \\ &= aE(X) + bE(Y) \end{aligned}$$

(ウ)の答 x_i

(エ)の答 y_j

講評 i と j を書き分けられない人や、シグマが苦手な人がかなりいる様です。でも計算しろというのでなく、書き方を覚えるだけですから外国語を覚えるのと同じようなものです。え？外国語も苦手ですか？でも赤ちゃんのとき日本語は覚えたのだから、きっと覚えられますよ。

2. 次の等式

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

は次のようにも示される。

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$$

だから { } の中を展開して

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y)$$

(1) により、右辺は

$$E(XY) - \mu_Y E(X) - \boxed{\text{オ}} + \mu_X \mu_Y$$

$E(X) = \mu_X, E(Y) = \mu_Y$ を代入すると $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$ となる。

(オ)の答 $\mu_X E(Y)$

講評 これはよい出来でした。言うことはありません。