積分練習問題解答

1. つぎの不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+5) = 2(x+1)$$

だから

$$\frac{x-1}{x^2+2x+5} = \frac{x+1}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}$$

と変形して，$y = x^2+2x+5$ とおくと $dy = 2(x+1)dx$ だから

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{dy}{2y} = \log|y| + C = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) + C.$$

一方，後半の積分は $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$ なので，$y = (x+1)/2$ と書くと

$$x^2+2x+5 = (2y)^2+4 = 4(y^2+1)$$

だから $dx = 2dy$ より

$$\int \frac{2}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{dy}{1+y^2} = \mathrm{Arctan} y + C = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

合わせて

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

部分積分により

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+3} = \log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \mathrm{Arctan} x + C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

$y = \sqrt{x+1}$ とすると $y^2 = x+1$ で $dx = 2ydy$. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2dy}{(y^2-1)} = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)\,dy = \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

$t = x + \sqrt{x^2+5}$ とおくと，$(t-x)^2 = x^2+5$ なので，

$$t^2 - 5 = 2tx \qquad \therefore x = \frac{t}{2} - \frac{5}{2t}.$$

これより

$$dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2t^2}\right)dt$$

で，

$$\sqrt{x^2+5} = t - x = \frac{t^2+5}{2t}$$

が分かる．従って

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \int \frac{2t}{t^2+5}\frac{t^2+5}{2t^2}\,dt = \log|t| + C = \log\left(x + \sqrt{x^2+5}\right) + C.$$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\log x)}$

$y = \log x$ とおくと $dy = \frac{dx}{x}$ だから，

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)} = \int \frac{dy}{1+y} = \log|1+y| + C = \log|1+\log x| + C.$$

(8) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

これは一旦問題からはなれて $I_k = \displaystyle\int \cos^{2k} x \, dx$ の計算をしておく。部分積分により、

$$\begin{aligned}
I_k &= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1) \int \sin^2 x \cos^{2k-2} x \, dx \\
&= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{2k-2} x \, dx \\
&= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1)(I_{k-1} - I_k) \\
&= \frac{1}{2k} \sin x \cos^{2k-1} x + \frac{2k-1}{2k} I_{k-1}.
\end{aligned}$$

これにより、求める積分は

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = I_2 - I_3 \\
&= -\frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{6} I_2 \\
&= -\frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{6 \cdot 4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{6 \cdot 4} I_1.
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
I_1 = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \\
= \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} + C
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
&\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx \\
&= -\frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{24} \sin x \cos^3 x - +frac116 \sin x \cos x + \frac{x}{16} + C.
\end{aligned}$$

(9) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

$\cos x = t$ とおくと、$\sin^2 x = 1 - t^2$ で、$-\sin x dx = dt$ だから、

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = -\int (1-x^2) x^4 dt = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

(10) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

$\sin 2x \cos 3x = \dfrac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$ だから、

$$\int \sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{\cos 5x}{5}\right) + C.$$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

$\sqrt{x} = t$ とおくと、$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ だから、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \int \frac{2dt}{t-1} = 2\log|\sqrt{x}-1| + C.\end{aligned}$$

(12) $\displaystyle\int x(x-4)^{1/3} \, dx$

$t = (x-4)^{1/3}$ とおく。$t^3 = x - 4$ より $x = t^3 + 4$ だから $dx = 3t^2 dt$ となり、

$$\begin{aligned}\int x(x-4)^{1/3}dx &= \int (t^3+4)\cdot t \cdot 3t^2 dt = \int (3t^6 + 12t^3)\, dt \\ &= \frac{3(x-4)^{7/3}}{7} + 3(x-4)^{4/3} + C.\end{aligned}$$

(13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

$t = x + 3 + \sqrt{x^2+6x+10}$ とおくと,

$$t^2 - 2t(x+3) + (x+3)^2 = x^2 + 6x + 10, \quad \therefore 2t(x+3) = t^2 - 1.$$

これより,

$$x + 3 = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt.$$

また,

$$\sqrt{x^2+6x+10} = t - (x+3) = \frac{t^2+1}{2t}$$

だから,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|x+3+\sqrt{x^2+6x+10}| + C.$$

(14) $\displaystyle\int \frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}\,dx$

$$\frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{3x+2} + \frac{c}{x-3}$$

を満たすように求めよう。右辺を通分すると、分母は左辺の分母と同じになり、分子は

$$\begin{aligned}&a(3x+2)(x-3)+b(2x-1)(x-3)+c(2x-1)(3x+2)\\&=(3a+2b+6c)x^2+(-7a-7b+c)x+(-6a+3b-2c)\end{aligned}$$

となるので、分子を比較して、

$$3a+2b+6c=7, \quad -7a-7b+c=2, \quad -6a+3b-2c=-3.$$

これを解くと、$a=\frac{1}{35}, b=-\frac{1}{7}, c=\frac{6}{5}$ となり、

$$\begin{aligned}&\int \frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}\,dx\\&=\frac{1}{35}\int\frac{dx}{2x-1}-\frac{1}{7}\int\frac{dx}{3x+2}+\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-3}\\&=\frac{1}{70}\log|2x-1|-\frac{1}{21}\log|3x+2|+\frac{6}{5}\log|x-3|+C.\end{aligned}$$

(15) $\displaystyle\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx$

これも部分分数展開をする。

$$\frac{x-11}{x^2+3x-4} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-1}$$

として、右辺を通分した時の分子は $a(x-1)+b(x+4)=(a+b)x+4b-a$ だから、 $a+b=1, 4b-a=-11$ となる。これを解いて $a=3, b=-2$ なので、

$$\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx = \int\frac{3\,dx}{x+4} - \int\frac{2\,dx}{x-1} = 3\log|x+4| - 2\log|x-1| + C.$$

(16) $\displaystyle\int \frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+5)}\,dx$
これも部分分数展開をする。

$$\frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+5)} = 1-\frac{7x^2-7x+16}{(x+3)(x^2-4x+5)} = 1-\frac{a}{x+3}-\frac{bx+c}{x^2-4x+5}$$

と書いて、右辺第 2 項と第 3 項を通分した時の分子は $(a+b)x^2+(3b+c-4a)x+5a+3c$ となるので、$a+b=7,\ -4a+3b+c=-7,\ 5a+3c=16.$ これをといて $a=\frac{50}{13},\ b=\frac{41}{13},\ c=-\frac{14}{13}$ を得る。

$$\int \frac{1}{13}\left(\frac{41x-14}{x^2-4x+5}\right)dx = \frac{41}{26}\log|x^2-4x+5|+\frac{68}{13}\int\frac{1}{x^2-4x+5}\,dx.$$

ところで

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-4x+5}\,dx &= \int\frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx\\ &= \int\frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (t=x-2,\ dt=dx)\\ &= \mathrm{Arctan}(x-2)+C\end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+5)}\,dx &= x-\frac{50}{13}\log|x+3|-\frac{41}{26}\log|x^2-4x+5|\\ &\quad -\frac{68}{13}\mathrm{Arctan}(x-2)+C.\end{aligned}$$

(17) $\displaystyle\int xe^x\,dx$
部分積分をする。

$$\int xe^x\,dx = xe^x-\int e^x\,dx = xe^x-e^x+C.$$

(18) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$
これも部分積分をする。

$$\int x\sin 2x\,dx = -x\frac{1}{2}\cos 2x+\int\frac{\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

(19) $\displaystyle\int x^3 \log x \, dx$

これも部分積分をする。

$$\begin{aligned}\int x^3 \log x \, dx &= \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{x^3}{4}\, dx \\ &= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + C.\end{aligned}$$

(20) $\displaystyle\int x\mathrm{Arctan}x \, dx$

これも部分積分をする。

$$\begin{aligned}\int x\mathrm{Arctan}x \, dx &= \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan}x - x + \mathrm{Arctan}x + C.\end{aligned}$$

(21) $\displaystyle\int x\cos^2 x \sin x \, dx$

これも部分積分をする。$\cos^2 \sin x = \frac{1}{3}(-\cos^3 x)'$ だから、

$$\int x\cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{x}{3}\cos^3 x + \int \frac{\cos^3 x}{3}\, dx.$$

$\cos^3 = (1-\sin^2 x)\cos x$ だから

$$\int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

したがって、

$$\int x\cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{\sin x}{3} - \frac{\sin^3 x}{9} + C.$$

(22) $\displaystyle\int x^5\sqrt{x^3+4}\, dx$

$y = x^3+4$ とおくと、 $x^3 = y-4$, $3x^2dx = dy$ で、

$$\begin{aligned}\int x^5\sqrt{x^3+4}\, dx &= \frac{1}{3}\int (y-4)\sqrt{y}\, dy \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{8}{3}y^{3/2}\right) + C \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\sqrt{(x^3+4)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(x^3+4)^3}\right) + C.\end{aligned}$$

2. 次の定積分を計算せよ

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4}$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \mathrm{Arctan} x\right]_1^\infty$$
$$= 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$

部分積分をして

$$\int_0^\pi \cos^4 x\,dx = \left[\sin x\cos^3 x\right]_0^\pi + 3\int_0^\pi \cos^2 x \sin^2 x\,dx$$
$$= 3\int_0^\pi (\cos^2 x - \cos^4 x)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{3\pi}{8}.$$

(3) $\displaystyle\int_1^4 x\log x\,dx$

部分積分をして

$$\int_1^4 x\log x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x}{2}\,dx = 8\log 4 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^4 = 8\log 4 - \frac{15}{4}.$$

(4) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$

$$\int_1^8 x^{1/3}\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^8 = \frac{45}{4}.$$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos\frac{x}{2}\,dx$

$y = x/2$ とおくと $2dy = dx$ で y の積分範囲は $[0, \pi/6]$ なので,

$$\int_0^{\pi/3} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi/6} \cos y dy = 1.$$

(6) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x^2+2x-3}$

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{dx}{x^2+2x-3} &= \int_2^4 \frac{dx}{(x+3)(x-1)} = \int_2^4 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|\right]_2^4 = \frac{1}{4}(\log\frac{3}{7}+\log 5) = \frac{1}{4}\log\frac{15}{7}.\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}x\,dx$

部分積分により，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{Arctan}x\,dx &= [x\mathrm{Arctan}x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2.\end{aligned}$$

(8) $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$

部分積分により，

$$\int_1^e \log x\,dx = [x\log x]_1^e - \int_1^e 1\,dx = 1.$$

(9) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \int_0^2 t^{-1/3}dt = 3\cdot 2^{-1/3}.$$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/3}}\,dx$

まず，$1-x^2=t$ とおくと $-2xdx=dt$ だから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/3}}\,dx &= -\int_1^0 \frac{1}{2}t^{-1/3}dt \\ &= \left[\frac{3}{4}t^{2/3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

(11) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx,$

これも $t = 9 - x^2$ とおいて $dt = -2xdx$ で

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_9^0 \frac{1}{\sqrt{t}} = 3.$$

3. 次の広義積分が収束するか発散するかを判定せよ

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+x}}$

$x \geq 1$ のとき， $\sqrt{x^6+x} \geq x^3$ だから

$$\begin{aligned}\int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x^6+x}} &\leq \int_1^N x^{-3}dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^N \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2N^2} \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

左辺の被積分関数は非負なので，左辺は N について単調に増加しているが，上の事から常に $1/2$ 以下．したがって上式左辺は $N \to \infty$ のとき収束する．つまりこの広義積分は収束する．

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{e^{2x}}\,dx$

$x \geq 1$ のとき $0 \leq \log x < e^x$ だから $\log x \cdot e^{-x} \leq 1$ となり，

$$\frac{\log x}{e^{2x}} \leq e^{-x}$$

がわかる．これより

$$\begin{aligned}\int_1^N \frac{\log x}{e^{2x}}\,dx &\leq \int_1^N e^{-x}dx \\ &= e^{-1} - e^{-N} \leq e^{-1}.\end{aligned}$$

左辺被積分関数は $x \geq 1$ のとき非負なので，$N \to \infty$ のとき収束する．つまりこの広義積分は収束する．

(3) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\log x}{x}\,dx$ これは $logx = t$ とおくと $x = e^t$ で

$$\frac{dx}{x} = dt, \quad dx = xdt, \quad \therefore dx = e^t dt$$

これより

$$\int_3^N \frac{\log x}{x}dx = \int_{\log 3}^{\log N} \frac{t}{e^t}e^t dt = \frac{\log^2 N - \log^2 3}{2} \to \infty$$

が分かるので，この広義積分は発散する． $x \geq 3$ のとき $\log x \geq 1$ だから左辺は

$$\int_3^N \frac{dx}{x}$$

以上が分かり，この積分は $N \to \infty$ のとき発散するので，もとの広義積分も発散するとしてもよい．

(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx$

$x \geq 1$ のとき $\log x \leq x$ だから

$$\frac{\log x}{x^3} \leq \frac{1}{x^2}.$$

$$\int_1^N \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^N = 1 - \frac{1}{N} \leq 1.$$

もともとの積分の被積分関数は $x \geq 1$ のとき非負なので，$\displaystyle\int_1^N \frac{\log x}{x^3}\,dx$ は上に有界で N について単調増加となり，この広義積分は収束する．

4. **やや難**

(a) n を自然数として、

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{2k-1}{2^n}x\right]$$

を証明せよ。

$n = 1$ のときは両辺 $\cos\frac{x}{2}$ なので、この式は自明に正しい。n で等式が成り立つとして $n+1$ のとき

$$\begin{aligned}
\text{左辺 } &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{(2k-1)x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

となるが、加法定理により

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{(2k-1)x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2^n}+\frac{x}{2^{n+1}}\right)+\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2^n}-\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(4k-1)x}{2^{n+1}}+\cos\frac{(4k-3)x}{2^{n+1}}\right]
\end{aligned}$$

となり、これを $k=1$ から $k=2^{n-1}$ まで加えて $\frac{1}{2^{n-1}}$ をかけると、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{(2k-1)x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\cos\frac{(2k-1)x}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

(b) 右辺は $n\to\infty$ のときある関数の定積分に近づく。この関数はなにか。また、定積分はどこからどこまでの区間で積分するものか？

これは区間 $[0,1]$ を 2^n 等分した分割に対する $f(t)=\cos tx$ のリーマン和と思える。（各小区間の代表点が区間の中央の点になっている。）したがって、$\cos tx$ は t の連続な関数だから積分が可能で、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\cos\frac{(2k-1)x}{2^{n+1}} = \int_0^1 \cos tx\,dt.$$

(c) この積分を計算せよ。また、これにより等式

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$$

が成り立つ事を確かめよ。

$$\int_0^1 \cos tx\,dt = \left[\frac{\sin tx}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sin x}{x}$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$$

(d) 上の事を使って

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

が成り立つ事を示せ。(Viète の公式)

記号として、

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+2x}}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

を用意する。また，$n \geq 1$ に対し，$f^{\circ(n+1)}(x) = f(f^{\circ n}(x))$ とおく。つまり、

$$f^{\circ n}(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n}.$$

半角の公式により、

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}.$$

したがって

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} = f\left(\cos \frac{\pi}{2^n}\right) = f^{\circ(n-1)}\left(\cos \frac{\pi}{4}\right).$$

この式を (c) の式に代入すれば、求める等式が得られている。

5. 関数 $f(x)$ の Laplace 変換 は

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

と与えられる。 Laplace 変換は微分方程式を解く時に有効である。

(a) $\alpha > -1$ のとき x^α の Laplace 変換は $\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$ となり、$s > 0$ で正しい。これを証明せよ。

$\alpha > -1$ のとき、$x^\alpha e^{-x}$ は $(0,\infty)$ で広義積分可能で、

$$L(x^\alpha) = \int_0^\infty e^{-sx}x^\alpha\,dx.$$

$s > 0$ なので、$v = sx$ と変換すると $dv = sdx$ で、積分範囲は変化しないので、

$$\begin{aligned} L(x^\alpha) &= \int_0^\infty \frac{v^\alpha}{s^\alpha} e^{-v} s^{-1}\,dv \\ &= \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha-1}. \end{aligned}$$

(b) $f(x) = e^{\alpha x}$ のとき、Laplace 変換は $1/(s-\alpha)$ である。これは $s > \alpha$ で正しい。これを証明せよ。

$$L(e^{\alpha x}) = \int_0^\infty e^{-sx+\alpha x}\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x}\,dx.$$

$s > \alpha$ ならばこの積分は収束するので、

$$\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x}\,dx = \frac{1}{s-\alpha}\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-(s-\alpha)x}\right]_0^N = \frac{1}{s-\alpha}$$

がわかる。

(c) $f(x) = \sin(\alpha x)$ の Laplace 変換は $\alpha/(s^2+\alpha^2)$ である。これは $s > 0$ で正しい。これを証明せよ。

$s > 0$ のとき部分積分により

$$\begin{aligned}
&\int_0^N e^{-sx}\sin\alpha x\,dx \\
&= \left[\frac{-1}{s}e^{-sx}\sin\alpha x\right]_0^N + \frac{\alpha}{s}\int_0^N e^{-sx}\cos\alpha x\,dx \\
&= -\frac{1}{s}e^{-sN}\sin\alpha N - \frac{\alpha}{s^2}\left[e^{-sx}\cos\alpha x\right]_0^N \\
&\qquad - \frac{\alpha^2}{s^2}\int_0^N e^{-sx}\sin\alpha x\,dx \\
&= \frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{s^2}}\left[-\frac{1}{s}e^{-sN}\sin\alpha N + \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s^2}e^{-sN}\cos\alpha N\right].
\end{aligned}$$

したがって $N \to \infty$ とすると、

$$\int_0^\infty e^{-sx}\sin\alpha x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}.$$

(d) $f(x) = \cos(\alpha x)$ の Laplace 変換を計算せよ。また、これは s がどのような条件を満たす時に計算できるか？

$$
\begin{aligned}
&\int_0^N e^{-sx}\cos\alpha x\,dx \\
&= \left[\frac{-1}{s}e^{-sx}\cos\alpha x\right]_0^N - \frac{\alpha}{s}\int_0^N e^{-sx}\sin\alpha x\,dx \\
&= \frac{1}{s}(1-e^{-sN}\cos\alpha N) + \frac{\alpha}{s^2}\left[e^{-sx}\sin\alpha x\right]_0^N \\
&\qquad - \frac{\alpha^2}{s^2}\int_0^N e^{-sx}\cos\alpha x\,dx \\
&= \frac{s}{s^2+\alpha^2}(1-e^{-sN}\cos\alpha N - \frac{\alpha}{s}e^{-sN}\sin\alpha N).
\end{aligned}
$$

右辺は $s>0$ のとき $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ に収束するが、$s\le 0$ のときは振動する。($N=2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\to\infty$ のときを考えるとよい。)

重積分の問題

6. 次の積分順序を交換せよ。ただし、 $a > 0$ とする。

解答は、それぞれの積分の積分領域をちゃんと図示できるかどうかが重要。それぞれを重積分

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

と表したとき、D がどうなるかをまず見る。

(a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx$
上の式を重積分 $\int_D f(x,y)dxdy$ でと表したとき、

$$D = \{(x,y)\,; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

となる．$(x,y) \in D$ のとき y は最大で 1 まで動く。y を止めると x は D で $y \le x$ と $0 \le x \le 1$ の二つを満たして動くので、$y \le x \le 1$. したがって

$$与式 = \int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)dx \right) dy.$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$
上の式を重積分 $\int_D f(x,y)dxdy$ と表したとき、

$$D = \{(x,y); 0 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

となる。$(x,y) \in D$ のとき y は最大で 1 まで、最小で -1 まで動く。この様な y を止めると、x は

$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

なので、$1 - x^2 \ge y^2$ となり、

$$-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$$

でないといけない。もともと x は D では $0 \le x \le 1$ を満たしながら動いているので、上の不等式と合わせると

$$0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$$

でないといけない。これより

$$与式 = \int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right)dy.$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} f(r,\theta)\,dr\right)d\theta$

上の式を重積分 $\int_D f(r,\theta)drd\theta$ でと表したとき、

$$D = \left\{(r,\theta);\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \frac{a}{\cos\theta}\right\}$$

となる。$(r,\theta) \in D$ のとき $\frac{a}{\cos\theta} \le \sqrt{2}a$ だから、r は $0 \le r \le \sqrt{2}a$ を動く。

$0 \le r \le a$ のとき $r \le a/\cos\theta$ は $0 \le \theta \le \pi/4$ で常に成り立っている。

一方、$a \le r \le \sqrt{2}a$ のとき、このような r を止めると、θ は $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ なので、 $\cos\theta > 0$ で、$r \le \frac{a}{\cos\theta}$ より

$$\cos\theta \le \frac{a}{r}, \quad \therefore \theta \ge \mathrm{Arccos}\frac{a}{r}.$$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_D f(r,\theta)drd\theta \\
&= \int_0^a\left(\int_0^{\pi/4} f(r,\theta)d\theta\right)dr + \int_a^{\sqrt{2}a}\left(\int_{\mathrm{Arccos}(a/r)}^{\pi/4} f(r,\theta)d\theta\right)dr.
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}} F(x,y)dy\right)dx$

上の式を重積分 $\int_D F(x,y)dxdy$ でと表したとき,

$$D = \left\{(x,y); 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x}\right\}.$$

y の動きうる最大の範囲は $0 \le y \le 1$ で，$x \le y \le \sqrt{x}$ を x について解くと $x, y \ge 0$ に注意して

$$y^2 \le x \le y$$

もともと x は D では $0 \leq x \leq 1$ を満たすことに注意して、

$$D = \left\{(x, y)\,;\, 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\right\}.$$

これより

$$\text{与式} = \int_D F(x, y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} F(x, y)dx \right) dy.$$

(e) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{6-y} F(x, y)dx \right) dy$

上の式を重積分　$\int_D F(x, y)dxdy$ でと表したとき、

$$D = \left\{(x, y)\,;\, 0 \leq y \leq 2,\, y^2 \leq x \leq 6 - y\right\}$$

x の動きうる範囲は $y = 0$ のとき $0 \leq x \leq 6$ が最大で、$y^2 \leq x$ を y について解いて $-\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}$, また $x \leq 6 - y$ より $y \leq 6 - x$ で、$0 \leq y \leq 2$ と合わせると

$$0 \leq x \leq 6,\, 0 \leq y \leq \min\{\sqrt{x}, 6 - x, 2\}$$

$$6 - x - \sqrt{x} = (3 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})$$

だから $\sqrt{x} \leq 2$ つまり $0 \leq x \leq 4$ のとき $6 - x \geq \sqrt{x}$ で、さらにこのとき $\sqrt{x} \leq 2$ より

$$\min\{\sqrt{x}, 6 - x, 2\} = \sqrt{x}.$$

また，$4 \leq x \leq 6$ のとき $6 - x \leq \sqrt{x}$ で、さらにこのときは $6 - x \leq 2$ より

$$\min\{\sqrt{x}, 6 - x, 2\} = 6 - x.$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_D F(x, y)dxdy \\ &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} F(x, y)dy \right) dx + \int_4^6 \left(\int_0^{6-x} F(x, y)dy \right) dx. \end{aligned}$$

(f) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{3y}} F(x,y)dx \right) dy$ 上の式を重積分　$\int_D F(x,y)dxdy$ で
と表したとき，

$$D = \left\{ (x,y)\,;\, 0 \le y \le 2,\ \sqrt{y} \le x\sqrt{3y} \right\}$$

x のとりうる最小値は $y=0$ のとき 0，最大値は $y=2$ のとき $\sqrt{6}$ となる．$\sqrt{y} \le x \le \sqrt{3y}$ を y について解いて

$$3y \ge x^2,\ \text{かつ}\ y \le x^2\ \text{より}\ \frac{x^2}{3} \le y \le x^2$$

$0 \le y \le 2$ に注意して，$(x,y) \in D$ は $0 \le x \le \sqrt{2}$ のとき $x^2 \le 2$ だから $\frac{x^2}{3} \le y \le x^2$ を動き，$\sqrt{2} \le x \le \sqrt{6}$ のとき $\frac{x^2}{3} \le y \le 2$ を動く．したがって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_D F(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2/3}^{x^2} F(x,y)dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \left(\int_{x^2/3}^{2} F(x,y)\,dy \right) dx.
\end{aligned}$$

7. 次の重積分を計算せよ。

(a) $\displaystyle\int_{\{0\le x+y\le 1,\ 0\le x-y\le 3\}} (1-x-y)e^{x-y}\,dxdy$
$u = x+y,\ v = x-y$ と置くと，$x = (u+v)/2,\ y-(u-v)/2$ で，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_{\{0\le u\le 1, 0\le v\le 3\}} (1-u)e^v \frac{1}{2} dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)du \int_0^3 e^v dv = \frac{1}{4}(e^3-1).
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}} 2z\,dxdydz$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, z = z$ と変数を変換. r, θ, z はこのとき $z^2 + r^2 \leq 1, z \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ を動くのでヤコビアンを計算して

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

より,

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_{\{z^2+r^2\leq 1,\, z\geq 0,\, 0\leq\theta\leq 2\pi\}} 2zrdrd\theta dz \\ &= 4\pi \int_{\{z^2+r^2\leq 1,\, z\geq 0\}} zrdzdr. \end{aligned}$$

さらに $z = \rho\cos\phi,\ r = \rho\sin\phi$ と書くと, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1$ の範囲に写るから,

$$\begin{aligned} 4\pi \int_{\{z^2+r^2\leq 1,\, r\geq 0, z\geq 0\}} zrdzdr &= 4\pi \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3 \cos\phi \sin\phi d\rho d\phi \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\phi}{2} d\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_D (3 - xy)\ dxdy, \qquad D = \{0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$

これはそのまま累次積分

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (3 - xy)dy\right) dx \\ &= \int_0^2 \left(3 - \frac{x}{2}\right) dx = 6 - 1 = 5. \end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_D (x + y)\ dxdy, \qquad D = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$

これもそのまま累次積分

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x+y)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}.
\end{aligned}
$$

(e) $\displaystyle\int_D ye^{y^3}\, dxdy \qquad D = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$

これは積分の順序を入れ替えるとうまくいく.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_x^1 ye^{y^3} dy \right) dx &= \int_{\{0\le x\le 1,\, x\le y\le 1\}} ye^{y^3} dxdy \\
&= \int_{\{0\le y\le 1,\, 0\le x\le y\}} ye^{y^3} dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y ye^{y^3} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{1}{3} e^{y^3} \right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.
\end{aligned}
$$

(f) $\displaystyle\int_D y^2\, dxdy \qquad D = \{x \ge 0, y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 4\}$

極座標に変数変換。 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で，変数の変域は $\{(r,\theta)\,;\, 0 \le r \le 2,\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$ に写る．ヤコビアンは r なので，

$$
\begin{aligned}
\int_{\{x\ge 0, y\ge 0,\, x^2+y^2\le 4\}} y^2 dxdy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 r^3 \sin^2\theta dr \right) d\theta \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= 4 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi.
\end{aligned}
$$

8. 次の立体の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(a) $V = \{(x, y, z)\,;\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2x,\, 0 \le z \le x^2 + y^2\}$
これはそのまま累次積分

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{2x} dx \\ &= \int_0^1 (2x^3 + \frac{8x^3}{3}) dx = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

(b) $V = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \le a^2,\, 0 \le z \le y\}$
まず z で積分してから極座標に変数変換

$$\begin{aligned} V &= \int_{\{x^2+y^2 \le a^2,\, 0 \le z \le y\}} dxdydz \\ &= \int_{\{x^2+y^2 \le a^2,\, y \ge 0\}} ydxdy \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \sin\theta drd\theta \\ &= \frac{a^3}{3} [-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

(c) $V = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \le ax,\, x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$（円柱座標 (r, θ, z) に変数変換）
円柱座標 (r, θ, z) に変換すると，ヤコビアンは r で，積分域は

$$\left\{ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le a\cos\theta, -\sqrt{a^2 - r^2} \le z \le \sqrt{a^2 - r^2} \right\}$$

と変わる．したがって

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{a\cos\theta} 2r\sqrt{a^2 - r^2} dr \right) d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{2}{3}(a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a\cos\theta} d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3}(a^3 - a^3 \sin^3\theta) d\theta \\
&= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \right) a^3.
\end{aligned}
$$

(d) 曲面 $z = xy$, 平面 $x + y = 1, z = 0$ によって囲まれた図形の体積 V.

この領域は図を描いてみると

$$
D = \{(x, y, z)\,;\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1,\ 0 \leq z \leq xy\}
$$

であることが分かる．したがってこの図形の体積は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{\{x\geq 0,\, y\geq 0,\, x+y\leq 1\}} \left(\int_0^{xy} dz \right) dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xydy \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)x^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

(e) 曲面 $z^2 = 4ax$ と円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ で囲まれた図形の体積 V.

この領域は

$$
D = \left\{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq ax, x \geq 0, -2\sqrt{ax} \leq z \leq 2\sqrt{ax}\right\}
$$

となる．したがってこの図形の体積は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{\{x\geq 0,\, x^2+y^2\leq ax\}} \left(\int_{\{-2\sqrt{ax}\leq z\leq 2\sqrt{ax}\}} dz \right) dxdy \\
&= \int_{\{x\geq 0,\, x^2+y^2\leq ax\}} 4\sqrt{ax} dxdy.
\end{aligned}
$$

ここで極座標に変換して，ヤコビアンが r, 積分域は

$$\left\{(r\,\theta)\,;\,0 \leq r \leq a\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

となり，被積分関数は $4\sqrt{ar\cos\theta}$ なので，

$$\begin{aligned}
&\int_{\{x\geq 0, x^2+y^2\leq ax\}} 4\sqrt{ax}dxdy \\
&= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\theta} r^{3/2}\sqrt{a\cos\theta}dr\right)d\theta \\
&= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2}{5}a^3\cos^3\theta d\theta \\
&= \frac{8a^3}{5}\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt \qquad (t=\sin\theta\text{と変数変換}) \\
&= \frac{32a^3}{15}.
\end{aligned}$$