

練習 5.2 次の積分順序を交換せよ .

$$(1) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx \qquad (2) \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx dy$$

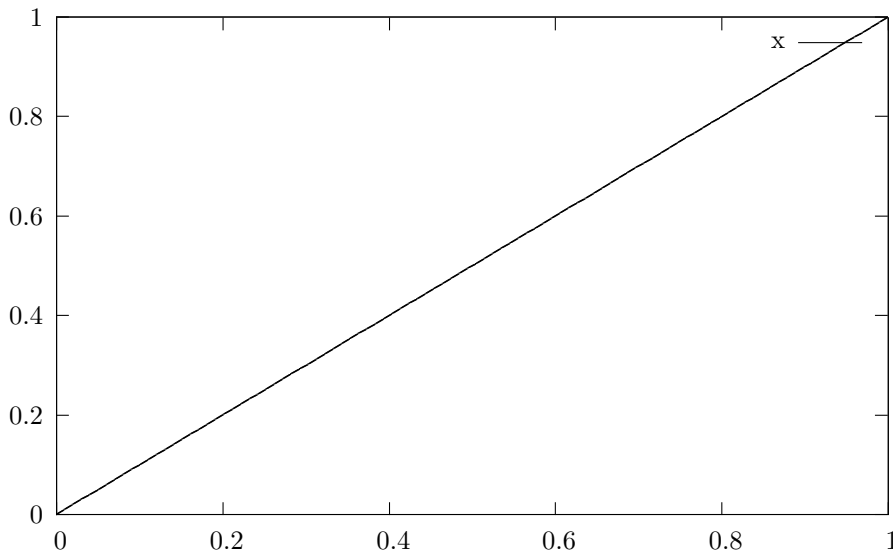
$$(3) \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x, y) dy dx \qquad (4) \int_{1/2}^1 \int_{x^3}^x f(x, y) dy dx$$

解答 (1) 積分範囲は

$$D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

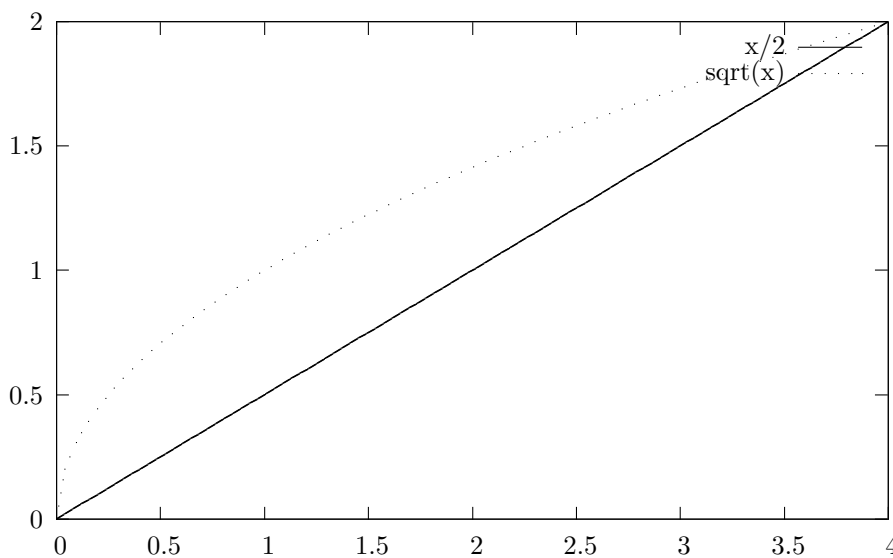
y の動く範囲は $0 \leq y \leq 1$ で, この範囲の y に対して x は $y \leq x$ を満たすので, 最初の条件 $0 \leq x \leq 1$ と合わせて $y \leq x \leq 1$ となる. したがって

$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy$$



(2) 積分範囲は

$$D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2y\}$$

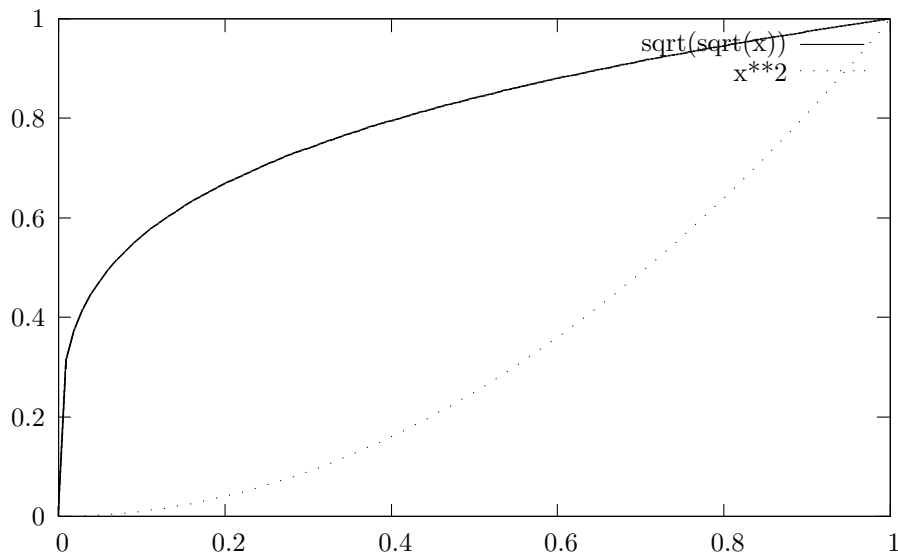


x の動く範囲は $0 \leq x \leq 4$ で、この範囲の x に対して不等式 $y^2 \leq x \leq 2y$ を y について解くと $\frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}$ となる。最初の y の条件 $0 \leq y \leq 2$ と比べて後の条件のほうが強いので、したがって

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dy dx = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dx dy$$

(3) 積分範囲は

$$D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x^{1/4}\}$$



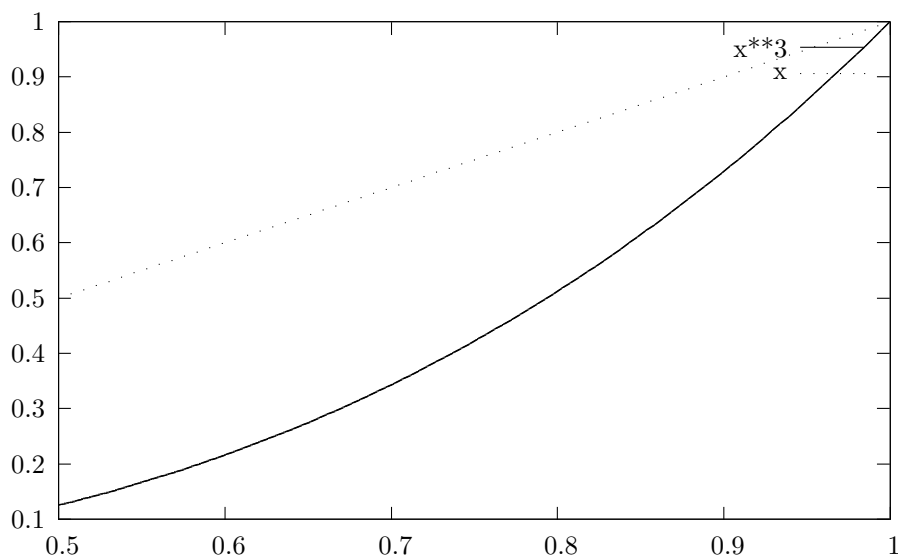
y の動き得る範囲は $0^2 = 0 \leq y \leq 1^{1/4} = 1$ として $0 \leq y \leq 1$ この y をとめる毎に $x^2 \leq y \leq x^{1/4}$ を x について解くと $y^4 \leq x \leq \sqrt{y}$

$0 \leq y \leq 1$ のとき、この不等式を満たす x は $0 \leq x \leq 1$ を満たす。したがって

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{y^4}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$

(4) 積分範囲は

$$D = \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$$



y の動き得る範囲は $\frac{1}{8} \leq y \leq 1$ であり, $x^3 \leq y \leq x$ を x について解くと

$$y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ とあわせると, $\frac{1}{8} \leq y \leq \frac{1}{2}$ では

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

となり, $y \geq \frac{1}{2}$ では

$$y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

となる. したがって

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x^3}^x f(x, y) dy dx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx dy$$

講評 今回は講義を最初から聞いた人とそうでない人で大きく差がついた感じです.

(1) は簡単なはずですが, ちゃんと図を描かないでやった人は x の動く範囲が $0 < x < y$ となってしまう. けっこう間違いが多かったです.

(2), (3) はほとんどの人ができていました. 計算間違いに注意しましょう.

(4) は積分の順序を入れ換えると, 場合分けが必要になる問題です. 実際には良く起こる計算です. しつかり練習しておいて下さい. できはこの問題が一番悪かったです.