微分積分学 2 演習 (18/11/2014)　解答例

練習 3.12 次の曲線の指定された区間での長さを求めよ。

(1) $y = x^{3/2}, \quad (0 \leq x \leq 5)$
ヒント： $x(t) = t, y(t) = t^{3/2}$ とかくと、公式が使える。

(2) $x(t) = 3t^2 + 2, \ y(t) = 2t^3 - \frac{1}{2}, \quad (1 \leq t \leq 4)$

解答　(1)　$x = t, \ y = t^{3/2}$ とかいて、

$$\frac{dx}{dt} = 1, \ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}t^{1/2} \quad (0 \leq t \leq 5)$$

だから、曲線の長さの公式により、 求める長さを L と書くと、

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)^2}\, dt = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\, dt$$

$s = 1 + \frac{9}{4}t$ とおいて、$ds = \frac{9}{4}dt$ だから、

$$L = \int_1^{\frac{49}{4}} s^{1/2}\frac{4}{9}ds = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1\right) = \frac{335}{27}$$

(2)　$\frac{dx}{dt} = 6t, \ \frac{dy}{dt} = 6t^2$ だから、

$$L = \int_1^4 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2}\, dt = \int_1^4 6t\sqrt{1 + t^2}\, dt$$

$1 + t^2 = u$ とおくと $2tdt = du$ で、$t = 1, 4$ のとき、$u = 2, 17$ だから

$$L = \int_2^{17} 3\sqrt{u}du = 2\left(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}\right)$$

講評　よくできていました．間違いは計算ミスだけでした．(2) で $t = \tan\theta$ とおいても計算できますが, 計算は面倒ですね.