微分積分学 2 演習 (11/11/2014)　疑問リストと回答 (2)
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習 3.11 今日の講義で，疑問に思ったことをリストアップせよ．

回答の続きです
(11 月 18 日提出分)

- 講義の内容があまりに濃づぎて頭がパンクしそうになった．

[回答]　そうですね．私も学生のときはそうでした．自分で勉強してみて議論の素晴らしさを感じることができます．そうするとハマってしまいますがね．

- 特になし．
- 特にないです．多変数の関数の積分もちゃんと勉強していきたいと思います．

[回答]　多変数の積分も一変数とそんなに違いはないことを学ぶと思います．頑張ってください．

- 全体的に難しすぎて，どこが分からないかも分からなかったです．
- 話の道筋がよく分からなかかった．
- 全体的に理解が曖昧でよく分からなかった．もう少し時間をかけて詰めていきたい．
- プリントの p.23 以降まったくついていけなかった．
- 配布プリントの p.22 の「2) 分割の幅が小さければ過剰和も不足和も S に近いこと」以降があまり分からなかった．

[回答]　何をやっているのか分からない状態だったのですね．人生にときには起こることです．あとで分かってみると「なるほど」と納得がいくものですが．拒否せずに,「難しくて分からないことだった」という記憶を大切にしてください．何かの折に「ああ，そうだったのか！」と分かったときは，とてもうれしいと思います．(Aha!体験というやつです)

- 過剰和・不足和，$\lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}_\Delta(f;\delta)$ と　$\lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}_\Delta(f;\delta)$ の違い．

[回答]　普通の関数だったらどちらも同じで $\int f(x)dx$ に近づきそうですよね．でも世の中には変な関数がうじゃうじゃいるのです．例えば

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数のとき} \\ 0 & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

を区間 $[0,1]$ で考えてみます．この分割 $\Delta = \{0 = t_0 < \ldots < t_m = 1\}$ をどのようにとっても有理数も無理数も稠密にありますから，$M_k = 1, m_k = 0$ が区間 $[t_{k-1}, t_k]$ で成り立ちます．これにより

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (t_k - t_{k-1}) = 1 - 0 = 1, \quad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (t_k - t_{k-1}) = 0$$

なので，二つの極限は 1 と 0 で一致しません．

- 積分の理論についてだったが，今日の授業で習ったことを何にどう使えばいいのかわからなかった．積分の理論について全体的に理解不能だった．

[回答]　皆さん大体そうです．分からないと「こんなことを何に使うんだ?」と拒絶感が出てきます．それに身を任せていると世界が狭くなります．上でも言いましたが，分からないことは「わからなかった」という記憶を大事にしてください．こういう理論があったから微分積分が発達し，世界の理解が深まる基礎ができたのです．まぁ,「こんな話もある」と許してやりましょう．

- 分割や積分の定義については大体分かったが，積分可能であると言うことの証明は途中から意味が分からなくなり，証明全体が疑問に思った．

[回答]　途中までよくついてきましたね.「何でわかりやすく教えてくれないんだ？」と思ったでしょう．でもこれは昔から時間をかけても難しいところで，自分で苦労して分かるしかないところです．今は「分からなかった」という記憶を大切にしまっておいて下さい．

- (5) 区分求積法から積分を理解しようとするとき，$\Delta \to d, \sum \to \int$ とする過程が人間の感覚に頼っていて理論的に論じられなかったところが "細分 "や" 不足和，過剰和" の考え方で，より厳密に語られたように思う．(2) 以降の話は $|\Delta| \to 0$ としたときの積分の精密さを確保しているのではないかと考えた．

[回答]　有難う．よくまとめてくれました．今後，微妙な問題を考えなくてはいけないときにこのような考え方が役に立つでしょう．

- (1) $\overline{S}_{\Delta_n}(f)$ を ε で抑えることの過程が見えない．また，$\underline{S}_{\Delta_n}(f)$ を ε で抑えた違いが分からない．
  (2) 分割の定義を理解してもそれをどんな風に利用すればよいかわからない．
  (3) Riemann 積分をこの様に学んでどう応用すればいいのかわからない．

[回答]　皆さんそうおっしゃいます．これまでは定理を学んだらすぐにその応用問題が与えられました．しかも結構自分の手ですぐに解けるような．今回学んだような考え方に慣れるための問題ももちろんたくさんあります．でもこれらの問題は解くのに数日もかかったりします.（その分面白いですが）残念ながらこの講義ではそこまで深くやりません．差し当たり,「こんな考え方もあり，その先は分かると面白いそうだ.」ぐらいで受け入れてください．

- 細分するところが理解できませんでした．

- Δ_1 は Δ_2 よりも細分である時，$\{t_j\} \supset \{s_k\}$ となるということは分かるのですが，

$$\overline{S}(f;\Delta_1) \le \overline{S}(f;\Delta_2)$$
$$\underline{S}(f;\Delta_1) \ge \underline{S}(f;\Delta_2)$$

  であることがよく分からなかったです．一様に連続であることなども理解できたのですが，そこからはいろいろと複雑になってきて，これはこういうものだと割り切って聞いていました．

[回答]　後半について：それでいいです．分からないフラストで自分をせめる必要はありません．みんな最初は分からないのですから．
前半について:いい質問です．例えば $[0,1]$ 区間で $\Delta_2 = \{0,1\}$(両端の端点だけ)，$\Delta_1 = \{0,1/2,1\}$ と Δ_2 に $1/2$ を一点付け加えたものを考え，$f(x) = x^2$ に対して $\overline{S}(f;\Delta_1), \overline{S}(f;\Delta_2)$ を計算してみてください．同じように $\underline{S}(f;\Delta_1), \underline{S}(f;\Delta_2)$ を計算して上の不等式を確かめてください．講義の一般論もこれと同じ理由によるものです．

- 過剰和，不足和の計算において，

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{m} M_k(t_k - t_{k-1}), \quad M_k = \max_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x)$$
$$\underline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{m} m_k(t_k - t_{k-1}), \quad m_k = \min_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x)$$

の M_k, m_k は複雑な関数のとき sup と inf と理解とあるが，例えばどのような関数のときに $\sup, \inf$ の方が求めやすいのか？

[回答]　うーん，これもうれしくなるほどいい質問ですね．例えば区間 $[0,1]$ の上で次のような関数を考えましょう．

$$f(x) = \begin{cases} x & if\, 0 \le x < 1/2, \\ 0 & if\, x = 1/2, \\ x-1 & if\, 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

この関数は $x = 1/2$ に近づくと一番大きい値 $1/2$ と一番小さい値 $-1/2$ に近づきますが，この関数自身は $x = 1/2$ で 0 をとるため最大値をとる場所はありませんし，最小値をとる場所もありません．しかし，$\sup_{x\in[0,1]} f(x) = 1/2$ であり，$\inf_{x\in[0,1]} f(x) = -1/2$ と $\sup, \inf$ はちゃんとあります．関数が連続でないとこんなことが起こるので，このときは $\sup, \inf$ を使うわけです．

- $[a,b]$ の分割 Δ を $|\Delta| < \delta^*$ ととるというところ辺りからよく分かりません．(同じような質問が二つありました)

[回答]　ここまでついてきただけでも立派です．分割を小さくとるということは隣り合う分点 t_{k-1} と t_k の間が狭くなるということです．だから $[t_{k-1}, t_k]$ の中の $f(x)$ の値はほとんど同じになります．だからこの区間の $f(x)$ の最大値 M_k と最小値 m_k はほとんど違いがありません．そうすると過剰和 $\overline{S}_\Delta(f)$ と不足和 $\underline{S}_\Delta(f)$ も違いはあまりないことを確かめているのです．

- $\delta^* > 0$ を

$$x, y \in [a,b], |x-y| < \delta^* \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

としているのは後の計算が楽になるからこうしたのか?

[回答]　そのとおりです．ε が小さいので定数倍されたものも小さいですね．後の計算で見やすいようにこういう置き方もよくやります．

- $|\underline{S}_\Delta(f) - S|$ がなんで $< \varepsilon$ でなく，$< \frac{\varepsilon}{4}$ なのか？

[回答]　理由は前の質問の答と同じですが，悩ませてごめんなさい．ここは最後を見やすくするためで，$< \varepsilon$ として議論しても結果が ε の定数倍で出てくるだけです．これも小さいですね．

- 最後の証明で Δ^* の議論が必要なのでしょうか? 議論の部分はもう少しゆっくり丁寧にやってほしかったです．

[回答]　後半はそうでしょうね．そうしたいのですが，ここを時間をかけると最後まで終わらない状況です．とにかく計算はみんなできるようになる必要があるので，理論は駆け足ですね．少しでもこういう推論のやり方に興味を持ったら教科書をじっくりと読んで見てください．

前半ですが，よい質問です．一つの細分の列 Δ_n に沿って $S = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\Delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\Delta_n}(f)$ と極限があることは分かったのですが，勝手な分割 Δ を $|\Delta|$ が十分小さくとってくると，過剰和 $\overline{S}_\Delta(f)$ と不足和 $\underline{S}_\Delta(f)$ のどちらも S に近いかどうかはまだ分かっていないので，それを確かめるために Δ_n と Δ をつなぐ Δ^* が必要になります．

- 定理は分かるが証明が分かりにくかった．

[回答]　いや，正直でよろしい！定理が分かったというところで定理と証明を分離できたところがいいです．証明は必要になったときに理解することができます．ただ，定理の条件はだいたいどれも外すことのできないものですから気をつけて下さい．この条件の中に証明のアイデアが隠れています．

- リーマン積分で考える体積の定義は，面積の場合と同様直方体に分けて考えて，泣いた移籍と外体積が一致するとき体積が存在すると考えるのか?また 4 次元以上の空間でも同様に定義できるか?

[回答]　いやー！いい質問です！ぞくぞくしますね．
体積は領域の上で 1 という値をとる関数の積分として定義しますが，君の考え方がより精密です．いわゆるジョルダンの測度という考え方です．講義でも最後の方で話ができると思います．

- 一様連続とはどういう意味ですか? 分割の幅が小さいと過剰和も不足和も S に近いことの説明が複雑で理解できませんでした．

- $f(x)$ が常に一様連続性を持つように勝手にとってよいものかどうかが疑問だった．

[回答]　いい質問ですね．みんなが「よく聞いてくれた」と思っていることでしょう．質問するのも勇気がいりますからね．二つ目の質問はさらにいい質問です．
ある区間 I で $f(x)$ が一様連続とは，任意の小さい $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を I のどの場所かに関係なく選べて，$x, y \in I$ が $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つときに言います．普通の連続とどこが違うか分かり憎いですね．例えば次のような関数を開区間 $(0, 1)$ で考えます．

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

いま任意に $\varepsilon > 0$ をとります．これに対してどんなに $\delta > 0$ を小さくとっても（区間の長さが 1 なので，$\delta < 1$ で探します.）$x, y \in (0, 1)$ が $|x - y| < \delta$ を満たしながら $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ となるようなものがあるのです.（例えば $x = \frac{\delta}{2\varepsilon+1}, y = \frac{\delta}{\varepsilon+1}$ ととると $|x - y| = \frac{\delta\varepsilon}{(2\varepsilon+1)(\varepsilon+1)}$ は δ より小さく，

$$|f(x) - f(y)| = \frac{2\varepsilon + 1 - \varepsilon - 1}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon.$$

つまり

$$x, y \in (0, 1), |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

は正しくないことになります．したがって一様連続ではありません．この関数は $(0, 1)$ では連続ですから連続でも一様連続とは限らないわけですが,「有界な閉区間上で連続な関数は一様連続」ということが証明できます.（微積の微分で少しやったかも）

- P.22 の c_j, d_j が出てくるあたりからよく分からないと思った．

[回答]　これは僕の説明不足ですね．これも連続関数の性質で,「閉区間で連続な関数はその区間で最大をとる点と最小をとる点がある.」という定理を使います．教科書に書いてありますが，時間の都合で説明を省いています．M_k は $[t_{k-1}, t_k]$ での $f(x)$ の最大値なので，この区間の中のどこかで $f(x) = M_k$ が実現しています．この点を d_k と呼び，最小値をとる点を c_k と呼んでいるわけです．

- 最後の質問はたくさんあり，どれもいい質問です．個別に答えておきます．

  (1) $\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta$ と $\lim_{|\Delta| \to 0} S_{\Delta_n}$ の違い．
  誘拐列の収束を利用するために細分列を導入したのは分かったのですが，Δ と Δ_n の根本的な違いが理解できませんでした．幅を小さくする操作を分点を増やしていく操作と見なせば任意の Δ をある細分列の要素と考えることはできないのでしょうか．

  [回答]　ここまで分かるとは素晴らしいですね．質問も的を得た質問です．確かに Δ はある細分列の要素と考えることができます．講義ではまず細分列 $\{\Delta_n\}$ を一つとり，それに沿って $\overline{S}_{\Delta_n}(f)$ と $\underline{S}_{\Delta_n}(f)$ が同じ極限 S に収束することを示しました．しかし，この細分列は Δ を含んでいないときもあり，Δ を含む細分列とは違います．細分列 $\{\Delta_n\}$ を取り替えても極限は変わらないということを言うために Δ や Δ^* が出てきたのです．

(2)
$$\overline{S}(f) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\Delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\Delta_n}(f) = \underline{S}(f)$$
から直ちに $\lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}_{\Delta}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}_{\Delta}(f)$ とできない理由.
(1) と関連して $|\Delta| \leq |\Delta_n|\,(n\to\infty)$ として
$$\overline{S}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}_{\Delta}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}_{\Delta}(f) = \underline{S}(f)$$
とできない理由が分かりませんでした.

[回答]　上で言ったように細分列になってないと極限は保証されていません. Δ は最初の細分列にないかもしれず, そこの部分を補う必要があるのが後半の議論です. でもいい質問ですねぇ. よく分かっているのが見えます.

(3) 「ε, δ をとめておく」とはどういう意味か？
$\forall\varepsilon$ について $\exists\delta$ が定まるのが収束の議論だったと思うのですが,「とめる」とはある ε のみ考えるという意味でしょうか? なぜ, そのような操作（考え方）が許されるのか, そして何故そのように考える必要があるのか分かりませんでした.

[回答]　うなっちゃうね. とてもいい質問です.
ε-δ 論法はどういう風に進むかというと,「任意の $\varepsilon > 0$ をとって一旦固定しなさい. この固定した ε に対しては特別の δ が ε に関係して決まり, $|x-y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ とできます.」という流れになります. 講義で ε, δ をとめるといったのは同じように ε を任意にとり一旦固定して δ を決めます. この後, この ε と δ に対して 分割 Δ や Δ_n を決めるわけです. でも最初にとるまでは ε の選び方は自由です.

(4) ε で考えるときの等号の有無.
一様連続の定義では
$$x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
の様に不等号だけの「$< \varepsilon$」の形で抑えられているにもかかわらず $\overline{S}_{\Delta}(f)$ と $\overline{S}_{\Delta^*}(f)$ の比較では
$$\overline{S}_{\Delta}(f) - \overline{S}_{\Delta^*}(f) = \ldots \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{p(k)} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (u_i^k - u_{i-1}^k)$$
のように等号を含む 「$\leq \varepsilon$」の形で抑えられている理由が分かりませんでした. 何らかの使い分けがあるのか疑問に思いました.

[回答]　ごめんなさい. これは僕の書き間違いです. $<$ に直して置いてください.
実際は今の場合は ε が任意なので上の様に書いても実害はありません. ε のところを最初に $\varepsilon/2$ と取り直して議論を進めると最後の不等式の右辺が半分になり, $<$ も成り立つからですが, 議論を複雑にするだけですから等号なしの不等式に直しておいてください.