微分積分学 2 演習 (11/11/2014)　疑問リストと回答
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習 3.11 今日の講義で，疑問に思ったことをリストアップせよ．

講義はしんどかったですね．皆さんの感想と疑問を列挙して答えておきます．
(当日提出分)

- 最後の証明の中身（が分からなかった）
- 意味不明で疑問すら生まれない．もっと勉強します．
- P.22 の分割の幅が小さければ過剰和も不足和も S に近いことの証明がスピードが速くて理解が追いつかなかったです．

[回答]　一言で言うと「積分はどう定義するかということと、連続関数は積分できるということをきちんと証明した」のがこの講義の内容です．これまであまりうるさいことを言っていない分，難しく感じたでしょう．「こういう風に証明するんだ」と思っていてください．「一様連続性」を使うところは難しいですね．聞いただけでは「スピードが速くて理解が追いつかない」というのはノーマルな反応だと思います．

- 特にありません．(または「白紙」)

[回答]　「質問しろといわれてもねぇ！何を質問したらいいのか？」という嘆きが聞こえてきそうです．でもむりやり質問をひねり出す訓練も大事です．社会に出たらこういう訓練も役に立つでしょう．

- 細分までは理解できたが，それ以降がよく分からなかった．
- 不足和、過剰和についての導入のあたりは理解できたと思うが，そこに発展した ε 絡みの話はよく分からなかった．

[回答]　皆さん大体そうです．ε を使うと証明がきちんとできるので，自分で証明するときは便利なのですが，聞くだけではなかなか親しみが持てないですね．見かけもいかついですし．

- 今日の講義はさっぱり理解できませんでしたが，過剰和、不足和の考えは驚きました．

[回答]　そうですか，驚きがありましたか！素晴らしいですね．この驚きを深く掘り下げて見てください．いいことがありますよ．

- (5) の式がどこからでてきたかよく分からなかった．図で上からと下からの積分はわかりやすかった．

[回答]　(5) の式は，その前に，細分の列 Δ_n が分割の幅 Δ_n を 0 に近づけたとき，

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_{\Delta_n}(f)=\overline{S}(f)\quad と\quad \lim_{n\to\infty}\underline{S}_{\Delta_n}(f)=\underline{S}(f)$$

があり，f が連続ならこの二つ $\overline{S}(f)$ と $\underline{S}(f)$ が一致することを言っています．この一致した値を S と書いています．だから $\overline{S}_{\Delta_n}(f)$ も $\underline{S}_{\Delta_n}(f)$ も n が大きいときは S にいくらでも近いのです．これを ε で表したのが (5) 式です．

- なぜ $|\overline{S}_{\Delta}(f)-S|<\varepsilon$ の証明が必要なのか．

[回答]　いい質問ですね．S は細分の列 $\{\Delta_n\}$ に対して $\overline{S}_{\Delta_n}(f)$ の極限になっていることをその前までに示したのですが,「ひょっとすると細分列を他のものに取り替えると極限が S とは違うかもしれない」という疑いが出てきます．したがって S は細分列 $\{\Delta_n\}$ のとりかたには無関係に決まっていることを言う必要があるのです．

- $$\sum_{\ell=1}^{k(i)}\left[\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)\right](u_\ell^i-u_{\ell-1}^i)-m_i(s_i-s_{i-1})\le\frac{\varepsilon(s_i-s_{i-1})}{2(b-a)}$$
  という式の意味.

[回答]　これもいい質問ですね．少し説明を省いたところを見事についています．すこし詳しく説明しましょう．

いま考えている分割は $\Delta=\{s_i\}_{i=0}^N$ と $\Delta_n=\{t_j\}_{j=0}^m$ の二つで，この二つの分点を合わせた分割を Δ^* と書いています．Δ^* の分点は $\{s_i\}_{i=0}^N\cup\{t_j\}_{j=0}^m$ です．だから Δ^* は Δ に対しても Δ_n に対しても細分になっています.

さて，Δ の隣り合う分点 s_{i-1} と s_i の間の閉区間 $[s_{i-1},s_i]$ に注目してみます．Δ^* は Δ の細分だから，s_{i-1} と s_i は Δ^* の分点ですが，それ以外にもこの区間 $[s_{i-1},s_i]$ の中に Δ^* の分点があるかもしれません．あったとしてこれらの分点を

$$s_{i-1}=u_0^i<u_1^i<\ldots<u_{k(i)}^i=s_i$$

と並べておきます．不足和 $\underline{S}(f:\Delta^*)$（講義では $S_{\Delta^*}(f)$ と書きました）に出てくる $[s_{i-1},s_i]$ の中の分点に対応する量は

$$\sum_{\ell=0}^{k(i)}\left[\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)\right](u_\ell^i-u_{\ell-1}^i)$$

となります．あとの Δ^* の分点はすべて区間 $[s_{i-1},s_i]$ の外にあります．一方，不足和 $\underline{S}(f:\Delta)$（講義では $\underline{S}_\Delta(f)$ と書きました）に出てくる $[s_{i-1},s_i]$ の中の分点に対応する量は

$$m_i(s_i-s_{i-1})=\left[\min_{x\in[s_{i-1},s_i]} f(x)\right](s_i-s_{i-1})$$

です．(s_i-s_{i-1}) を細かく分けて

$$(s_i-s_{i-1})=\sum_{\ell=1}^{k}(i)(u_\ell^i-u_{\ell-1}^i)$$

とかけるので，

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{k(i)}\left[\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)\right](u_\ell^i-u_{\ell-1}^i)-m_i(s_i-s_{i-1})\\&=\sum_{\ell=1}^{k(i)}\left[\left\{\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)\right\}-m_i\right](u_\ell^i-u_{\ell-1}^i)\end{aligned}$$

したがって，君が分からないと言った式は実は，それぞれの小さな区間 $[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]$ で

$$0\le\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)-m_i\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

を確かめれば出てくることになります．m_i は連続関数 $f(x)$ の $[s_{i-1},s_i]$ での最小値であり，$f(x^*)=m_i$ となる x^* は $[s_{i-1},s_i]$ の中の点です．同様に，$\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)$ は部分区間 $[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]$ での $f(x)$ の最小値なので，$\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)=f(y^*)$ となる点も $[s_{i-1},s_i]$ の中の点です．s_i たちは分割 Δ の分点ですから，

$$|x^*-y^*|\le|s_i-s_{i-1}|\le|\Delta|<\delta_0\quad(\text{講義では}\delta^*\text{ と書いた})$$

となります．これは δ_0 のとりかたから

$$0\le\min_{x\in[u_{\ell-1}^i,u_\ell^i]} f(x)-m_i=f(y^*)-f(x^*)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

を意味しています．口頭ではこんなことを言ったのですが，読むだけでも大変なのに聞いただけではなかなか理解できないですよね.