微分積分学 2 演習 (28/10/2014)　解答例

練習 3.8　（教科書 p.99 問 3.14）次の関数の不定積分を求めよ．

$$(1)\frac{x^4}{x^2+1} \qquad (2)\frac{1}{x(x+1)^2} \qquad (3)\frac{1}{x^3+1}$$

解答

(1)

$$\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2+1} = x^2-1+\frac{1}{1+x^2}$$

だから，

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \mathrm{Arctan}x + C$$

(2)

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

とおいて右辺を通分してみると分子は

$$(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a$$

となり，これが 1 に等しいので，係数を比較して

$$a+b=0,\ 2a+b+c=0,\ a=1.$$

これを解いて，$a=1, b=-1, c=-1$ がわかる．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

(3)

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

と因数分解できるから，

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

として係数比較して $a=1/3,\ b=-1/3,\ c=2/3$ を得る．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\log|x+1| - \int \frac{1}{2}\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\log|x+1| - \log\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\ \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

講評 (1) の出来は良かったです．何人かの人が

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

が積分できず，苦し紛れにこの積分は

$$\frac{1}{2x}\log(1+x^2)$$

となると書いていました．Arctan$x$ の微分を覚えていないですね．ちゃんと勉強しておいてください．

(2) はほとんどの人ができてました．部分分数に直すとき計算を間違えないように．

(3) は解かなくてもいいと言いましたが，かなりの人が解いてくれました．ちゃんとできた場合は他の問題で軽度のミスをしても recover できたとして満点にしてます．うれしいですね．こういうチャレンジ精神は好きですね．

練習 3.9 次の不定積分を計算せよ

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

解答　$t=\tan x/2$ とおくと，

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}dx \qquad \therefore dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

また

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-t^2) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

より

$$1+\cos x = 1+\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

だから，

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1+t^2}{2}\frac{2dt}{1+t^2} = t + C = \tan\frac{x}{2} + C.$$

講評　これもできはよかったです．講義の例と違い，この場合は三角関数を工夫して

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx = -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C$$

と解いてもいいわけです．でも思い付きが必要ですね．それに比べると上の解答は苦労が少ないです．(苦労が少ないのがいいというわけではありません．苦労したことが身につくのも確かです.)