微分積分学 2 演習 (14/10/2014) 解答例
提出はそれぞれの問題の (1), (2) で充分ですが，すべての問題の解答を与えておきます。

練習 3.3 （教科書 p.91 問 3.8） 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $x\sqrt{1+x^2}$　(2) $\dfrac{\log x}{x}$　(3) xe^{x^2}　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

解答 (1) $t = 1+x^2$ とおくと，$dt = 2xdx$. したがって

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int t^{1/2}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{3}t^{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

(2) $t = \log x$ とおくと $dt = \frac{dx}{x}$. したがって

$$\int \frac{\log|x|}{x}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\log|x|)^2}{2} + C.$$

(3) $t = x^2$ とおくと，$dt = 2xdx$. したがって

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

(4) $t = \sqrt{x}$ とおくと，$t^2 = x$, $2tdt = dx$. したがって

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{2tdt}{t\sqrt{1-t^2}} = 2\mathrm{Arcsin}t + C = 2\mathrm{Arcsin}\sqrt{x} + C$$

練習 3.4 （教科書 p.91 問 3.9） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

解答

(1) $t = x^2$ とおくと $dt = 2xdx$ で x が 0 から 1 に動くとき t は 0 から 1 を動くから，

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\big[\log(1+t)\big]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2.$$

(2) $t = \sin x$ とおくと $dt = \cos xdx$ で，x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ までを動くとき t は 0 から 1 までを動くので，

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\mathrm{Arctan}t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(3) $t = e^x$ とおくと $dt = e^x dx$ で x が -1 から 1 まで動くとき t は e^{-1} から e までを動くので，

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_{-1}^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int_{e^{-1}}^e \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}(e) - \mathrm{Arctan}(e^{-1})$$

となり，これで終わりでもよいが，加法定理を使って

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

から

$$\tan\left(\mathrm{Arctan}(e) - \mathrm{Arctan}(e^{-1})\right) = \frac{e - e^{-1}}{1 + ee^{-1}} = \sinh 1$$

であることを使って

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \mathrm{Arctan}(e) - \mathrm{Arctan}(e^{-1}) = \mathrm{Arctan}(\sinh 1)$$

としてもよい.

練習 3.5 次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

解答　$t - x = \sqrt{x^2+4}$ とおくと

$$(t-x)^2 = x^2 + 4, \quad \therefore x = \frac{t^2-4}{2t},\ dx = \frac{t^2+4}{2t^2}dt.$$

また,

$$\sqrt{x^2+4} = t - x = \frac{t^2+4}{2t}$$

であり，したがって

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{2t}{t^2+4}\frac{t^2+4}{2t^2}dt = \log|t| + C = \log\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

(2)　$t = x + 1$ とおくと $x^2 + 2x + 2 = y^2 + 1$, $dy = dx$ だから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \log|y + \sqrt{y^2+1}| + C = \log\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$