微分積分学 2 演習 (13/01/2015)　解答例

練習 5.5 $\alpha > 1$ のとき $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}$ は $D = \{x^2+y^2 \geq 1\}$ で広義積分可能であることを示し，

$$\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha} dxdy$$

の値を求めよ．

解答　$D_R = \{1 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$ とおくと D_R は D に対する取りつくしの列になっており，

$$\int_{D_R} f(x,y)dxdy = \int_1^R r^{-2\alpha} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{1-R^{2-2\alpha}}{2\alpha-2}$$

$R \to \infty$ のとき右辺は $\dfrac{\pi}{\alpha-1}$ に近づく．$f(x,y) \geq 0$ なので，これより f は D で広義積分可能で，その値は

$$\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha} dxdy = \frac{\pi}{\alpha-1}$$

講評　とり尽くしの列は有界集合で面積確定のものでとります．

$$D_n = \{1 + \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

とした人も結構いましたが，これは無限領域なので，その上の積分はやっぱり有界領域の上の積分の極限でないといけないので，広義積分をまたやることになります．二度手間です．また、うるさく言うとこの D_n は $n \to \infty$ では $\{1 < x^2+y^2\}$ に近づくので，

$$D = \{1 \leq x^2+y^2\}$$

には近づいていません．非負の関数に対しては「有限な領域上の積分が、領域を広げたとき極限を持てば，広義積分になる」ということを覚えておいて下さい．