微分積分学 2 演習 (06/01/2015)　解答例

練習 5.4　次の重積分を計算せよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\le 1,\, 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\}} x^2 z\, dxdydz$　　(2) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2+z^2\le a^2\}} \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$

解答　(1)　積分域を D と書くと，

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$$

円柱座標で変数変換すると，

$$x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta,\, z = z$$

で，ヤコビアンの絶対値は r である．この変換で D は

$$E = \{(r,\theta,z)\,;\, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le r\}$$

に写るので，

$$\begin{aligned}\int_D x^2 z dxdydz &= \int_E r^2\cos^2\theta z r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 \left(\int_0^r z dz\right) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^1 \frac{r^5}{2} dr \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

(2) 空間の極座標で変数変換すると

$$x = r\cos\theta\sin\phi,\, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\phi$$

ただし，$r \ge 0, 0\theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi$ の範囲で考える．このとき積分領域は

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$$

で，これは極座標変換で

$$\{(r,\theta,\phi) \in [0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi)\,;\, 0 \le r \le a\}$$

に写る．また，ヤコビアンの絶対値は $r^2\sin\phi$ となる．したがって求める積分は

$$\begin{aligned}&\int_{\{x^2+y^2+z^2\le a^2\}} \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} \\ &= \int_{\{0\le r\le a,\, 0\le\theta\le 2\pi,\, 0\le\phi\le\pi\}} \frac{r^2\sin\phi dr d\theta d\phi}{\sqrt{1+r^2}} \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin\phi d\phi \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}} \\ &= 4\pi \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\end{aligned}$$

右辺の積分については，いろいろ方法はあるが，ここでは部分積分を使って次のように計算しておく.

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}dr &= \int_0^a \sqrt{1+r^2}dr - \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} \\ &= \left[r\sqrt{1+r^2}\right]_0^a - \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}dr - \log|a+\sqrt{1+a^2}| \quad \because \text{部分積分} \\ &= \frac{1}{2}\left[a\sqrt{1+a^2} - \log|a+\sqrt{1+a^2}|\right] \quad \because \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}dr \text{ を左辺に移項}\end{aligned}$$

なので,

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2\leq a^2\}} \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = 2\pi\left[a\sqrt{1+a^2} - \log|a+\sqrt{1+a^2}|\right]$$

講評　(1) はヤコビアンの計算を間違えるか

$$\int_0^r zdz = r$$

とした人が数人いました．まあできはよかったです．(2) は最後の r の積分でつまった人も多かったです.
練習しておいてください.