微分積分学 2 演習 (16/12/2014)　解答例

練習 5.3　次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}\frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}}(x^2-y^2)dxdy$

解答　(1) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と置く．$r\ge 0,\ 0\le\theta<2\pi$ である．(r は半径だから $r\ge 0$, θ は 1 回転分だから $0\le\theta<2\pi$.) 考えている領域は

$$x^2+y^2\le a^2 \quad \text{i.e. } r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2\le a^2$$

なので，$0\le r\le |a|$ です．θ についてはこの領域では制限は出てこないので，そのまま $0\le\theta<2\pi$ となります．変数変換のヤコビアンは

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=r$$

だから，求める積分は

$$\begin{aligned}\int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}\frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} &=\int_{\{0\le r\le|a|,\,0\le\theta<2\pi\}}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{1+r^2}}\\ &=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{|a|}\frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}}\\ &=2\pi\left[\sqrt{1+r^2}\right]_0^{|a|}\\ &=2\pi(\sqrt{1+a^2}-1)\end{aligned}$$

(2)　これも $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と置く．一般に $0\le r, 0\le\theta<2\pi$ であるが，考えている積分領域は

$$x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0$$

なので、前半の条件から $r^2\le 4$ つまり $0\le r\le 2$ が出てきて，後半の条件から $\cos\theta\ge 0,\sin\theta\ge 0$ つまり $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ が出てくる．変数変換のヤコビアンは

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=r$$

だから，求める積分は

$$\begin{aligned}\int_{\{x^2+y^2\le 4,\,x\ge 0,y\ge 0\}}(x^2-y^2)dxdy &=\int_{\{0\le r\le 2,\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}}r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)rdrd\theta\\ &=\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta d\theta\int_0^2 r^3dr\\ &=0\end{aligned}$$

講評　(1) で

$$\int_0^2\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr=\left[\sqrt{1+r^2}\right]_0^a$$

の計算ができなかった人が結構いました．よく考えれば難しくないのですが．また，せっかくここまで来ながら $r = 0$ のときの値を 0 とした惜しい人も数人いました．

今回の間違いの中で一番罪が重いのはヤコビアンを書いていない人です．もちろん結果も違ってきますので，合うはずもないのですが，この間違いを見つけたら,「一発退場」ものです．

（2）で $u = x + y, v = x - y$ と変数変換をした人もいます．これでもできますが

$$x^2 + y^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

だから変数 u, v の動く範囲も $u^2 + v^2 \leq 8, u + v \geq 0, u - v \geq 0$ と変わりますが，簡単になったとは言えませんね．変数変換は積分領域をどう簡単な式に表すかを考えることが一番重要です．計算結果は 0 になるので，もとの積分をよく見てみると x と y を入れ替えると

$$\int_{\{x^2+y^2\leq 4,\, x\geq 0, y\geq 0\}} (y^2 - x^2) dxdy$$

と等しいことが分かります．これからこの積分が 0 になるのが正しいことを確かめることもできますね．

練習 5.4 (自習用)

ガンマ関数とベータ関数についての良く知られた式を証明しよう．$a > 0, b > 0$ のとき

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx \int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}\,dy = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

を 2 重積分と見る事ができる．

(1)　ここで，次のように変数を変換する．$u = x, v = x + y$ このとき，変換のヤコビアンと u, v の動く範囲を求め，上の積分を u, v の積分で表せ。

解　$0 \leq x, y < \infty$ だから，$0 \leq u = x < \infty, 0 \leq u \leq v = x + y < \infty$ となる．ヤコビアンは $x = u, y = v - u$ だから

$$J = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

となり，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}y^{b-1}e^{-y}dxdy \\
&= \int_{\{0\leq u\leq v<\infty\}} u^{a-1}(v-u)^{b-1}e^{-v}dudv \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^v u^{a-1}(v-u)^{b-1}du\right) e^{-v}dv.
\end{aligned}$$

(2)　さらに変数を $w = \frac{u}{v}$, $z = v$ と変換して、変換のヤコビアンと w, z の動く範囲を求め，

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

が成り立つ事を確かめよ．ただし，$B(a,b)$ はベータ関数で

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

とする．これらの積分は広義積分であるが，普通に計算して良い。

解　$u = wv = wz$ なので，$0 \leq u \leq v < \infty$ のとき，$0 \leq w \leq 1, 0 \leq z < \infty$ と動き，ヤコビアンは

$$J = \det \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = z$$

なので，(1) の計算から

$$\gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw \int_0^\infty z^{a+b-1} e^{-z} dz$$

右辺は $B(a,b)\Gamma(a+b)$ である．

（プリントの問題では w の定義で u と v が逆になってました．済みません.）