

定理 5.1 D が縦線形の領域、つまり連続な関数 $\varphi(x) \leq \psi(x)$ に対して

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

とかけるとき、(x と y の役割が入れ替わっても良い) $f(x, y)$ が \bar{D} 上で連続ならば、

(1) $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ は区間 $[a, b]$ 上で連続で、従って積分可能で、

(2) 次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b F(x) dx = \int_D f(x, y) dx dy$$

証明 (1) $F(x+h) - F(x)$ を計算してみる。

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x+h, y) dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} (f(x+h, y) - f(x, y)) dy \\ &\quad + \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x, y) dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} (f(x+h, y) - f(x, y)) dy \\ &\quad + \int_{\psi(x)}^{\varphi(x+h)} f(x, y) dy - \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+h)} f(x, y) dy \\ &=: I + II - III \end{aligned}$$

$f(x, y)$ が有界閉集合 \bar{D} 上で連続なので有界かつ一様連続として良く、このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ がとれて $|h| + |k| < \delta$ ならば $|f(x+h, y+k) - f(x, y)| < \varepsilon$ が任意の $(x, y) \in D$ に対して成り立つ。これより、 $|h| < \delta$ のとき

$$|I| < \varepsilon \times \max\{|\psi(x)| + |\varphi(x)|; a \leq x \leq b\}$$

また、 \bar{D} で f は連続なので有界になるので、 $|f(x, y)| \leq M$ が常に成り立つような M がとれて、

$$|II| \leq M|\psi(x+h) - \psi(x)|, \quad |III| \leq M|\varphi(x+h) - \varphi(x)|$$

となる。 $\psi(x), \varphi(x)$ は連続なので、II と III は $h \rightarrow 0$ のとき 0 に近づく。 I は h が小さい時いくらでも小さいので、これも $h \rightarrow 0$ のとき 0 に行く。つまり $F(x)$ は連続。

(2) 長方形 $[a, b] \times [c, d]$ を D を含むように取り、 \tilde{f} で f を D の外で 0 になるように拡張したものとする。 $[a, b]$ の分割 $\Delta_1 = \{a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b\}$ と $[c, d]$ の分割 $\Delta_2 = \{c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d\}$ をとると、

$$M_{i,j} = \max\{\tilde{f}(x,y); s_{i-1} \leq x \leq s_i, t_{j-1} \leq y \leq t_j\}$$

$$m_{i,j} = \min\{\tilde{f}(x,y); s_{i-1} \leq x \leq s_i, t_{j-1} \leq y \leq t_j\}$$

に対して $s_{i-1} \leq x \leq s_i$ ならば

$$\sum_j m_{i,j} |t_j - t_{j-1}| \leq \int_c^d \tilde{f}(x,y) dy \leq \sum_j M_{i,j} |t_j - t_{j-1}|$$

この各辺を $[s_{i-1}, s_i]$ で積分して、その後 i について加えると

$$\underline{S}_\Delta \leq \int_a^b F(x) dx \leq \overline{S}_\Delta$$

となる。ただし、 $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. あとは \tilde{f} が $[a, b] \times [c, d]$ で積分可能なことを言えばよいが、 D の中では $\tilde{f} = f$ なので連続で、 $M_{i,j} - m_{i,j}$ はどこでも一様に小さい。 D の外では $\tilde{f} = 0$ なので、 $M_{i,j} = m_{i,j} = 0$ だから、問題は $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ のうち、 $y = \psi(x), y = \varphi(x)$ と重なるものが問題。このような i, j では $m_{i,j} = 0$ だが $M_{i,j}$ は大きい可能性がある。これは $y = \psi(x), y = \varphi(x)$ の一様連続性から $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$ なら

$$\begin{aligned} \overline{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta &\leq \varepsilon(b-a)(d-c) \\ &\quad + M \times (\max\{|\varphi(x) - \varphi(x')| + |\psi(x) - \psi(x')|; |x - x'| \leq \delta\} \\ &\quad + 2\delta)(b-a) \end{aligned}$$

が $|\Delta| \leq \delta$ の時に成り立つ。

□

5.4 積分順序の交換

重積分は x から積分しても y から積分しても良いという事を前に言った。ここではもう少し詳しくこの理由を考えてみる。定理 5.1 の証明では、縦と横は本質的な違いはないので、もし上の定理で

$$D = \{(x, y); c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

となる $c \leq y \leq d$ で連続な関数 $g(y), h(y)$ があるならば同じように議論することで

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

も成り立つ。つまり、積分の順序を入れ替え得ることができる。

注意 5.2 注意しないとイケないのは、 D について、 x を先に止めて y の動く範囲と見たときと y を最初に止めて x の動く範囲とみたものはまるきり見かけが違ふことである。例えば、 $a, b, c, d > 0$ として

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, x - c \leq y \leq 2x + d\}$$

は、 y を先に止めると $2a + d \geq b - c$ の時は

$$\begin{aligned} D = & \{(x, y); a - c \leq y \leq b - c, a \leq x \leq y + c\} \\ & \cup \{(x, y); b - c \leq y \leq 2a + d, a \leq x \leq b\} \\ & \cup \{(x, y); 2a + d \leq y \leq 2b + d, \frac{y - d}{2} \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

となる。(その他の場合は? 自分で考えてみてください)

例 5.3 積分域の書き直し 積分の順番を入れ換えると累次積分の積分の範囲が変わる。このことに注意して次の積分の順番を入れ換えてみる。

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x, y) dy \right) dx$$

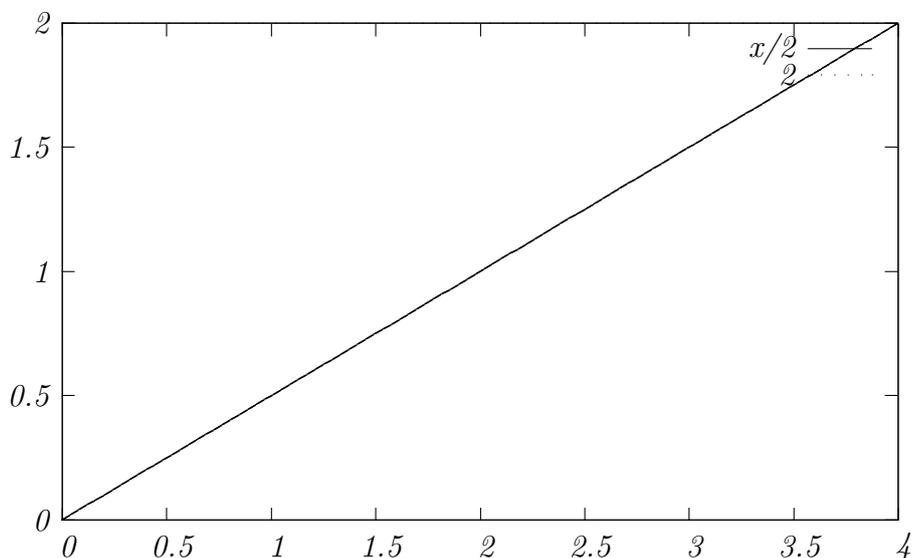
この場合、 y の動ける範囲は $0 \leq y \leq 2$ であり、 $\frac{x}{2} \leq y$ および $0 \leq x \leq 4$ より、

$$0 \leq x \leq 2y$$

が出てくる。したがってこの場合は簡単で、

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2y} f(x, y) dx \right) dy$$

となる。



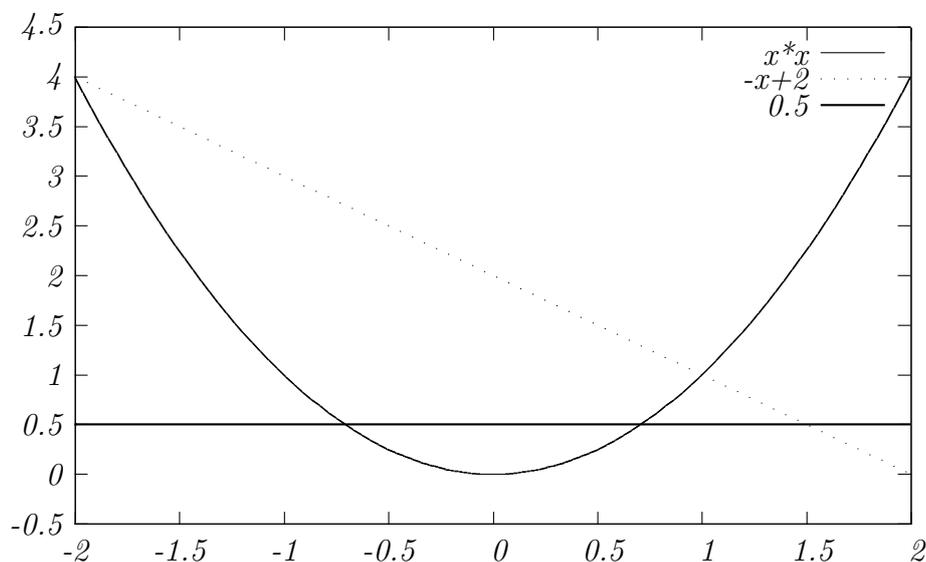
例 5.4 D を $y = x^2$, $y = -x + 2$, $y = \frac{1}{2}$ で囲まれた $y \geq x^2$ を満たす領域として $\int_D xy \, dx dy$ を計算する。図より $y = -x + 2$ と $y = x^2$ の交点は $(-2, 4)$, $(1, 1)$ でどちらも $y = 1/2$ の上にあるので、 x で先に積分した方が積分範囲の分解が簡単。

$$\begin{aligned}
 \int_D xy \, dx dy &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy \, dx dy + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{-y+2} xy \, dx dy \\
 &= \int_1^4 \frac{1}{2} (y(2-y)^2 - y^2) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_1^4 y(y-2)^2 dy - 21 \right] \\
 \int_1^4 y(y-2)^2 dy &= \left[\frac{y(y-2)^3}{3} \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{(y-2)^3}{3} dy \\
 &= 11 - \frac{5}{4} = \frac{39}{4}
 \end{aligned}$$

従って

$$\int_1^4 \frac{1}{2} (y(2-y)^2 - y^2) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{39}{4} - 21 \right) = -\frac{45}{8}$$

となる。



練習 5.2 次の積分順序を交換せよ。

$$(1) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx \qquad (2) \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx dy$$

$$(3) \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x, y) dy dx \qquad (4) \int_{1/2}^1 \int_{x^3}^x f(x, y) dy dx$$

5.5 多重積分

変数がたくさんある場合も積分は同じように定義できる。積分の順序も交換できるので、計算は累次積分によって実行できる。

5.5.1 三重積分

\mathbb{R}^3 の直方体 $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 上の有界な関数 $f(x, y, z)$ が R 上積分可能であるとは、 $i = 1, 2, 3$ に対して $[a_i, b_i]$ の分割

$$\Delta_i := \{a_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \dots < t_{i,n(i)} = b_i\}$$

を任意にとるとき、これらで作った R の分割

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3$$

について、 $|\Delta| = \max\{|\Delta_i|; i = 1, 2, 3\}$ が 0 に近づくなれば、過剰和

$$\bar{S}_\Delta = \sum_{0 \leq j_1 \leq n(1)} \sum_{0 \leq j_2 \leq n(2)} \sum_{0 \leq j_3 \leq n(3)} \max_{(x,y,z) \in C(j_1, j_2, j_3)} f(x, y, z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

および不足和

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{0 \leq j_1 \leq n(1)} \sum_{0 \leq j_2 \leq n(2)} \sum_{0 \leq j_3 \leq n(3)} \min_{(x,y,z) \in C(j_1, j_2, j_3)} f(x, y, z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

がそれぞれ同じ極限に近づく時にいう。