

5 重積分

これから変数をたくさん持つ関数についての積分を勉強する．基本は1変数の積分だから恐れる必要はない．

5.1 長方形上の重積分

R を長方形 $[a, b] \times [c, d] := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ とする． R 上で定義された有界な関数 $f = f(x, y)$ の定積分

$$\int_R f(x, y) dx dy$$

を以下の手順で定義する．

1° 区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ の分割を

$$\Delta_1 = \{a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b\}$$

$$\Delta_2 = \{c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d\}$$

をとり、

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 = \{C_{i,j} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j] : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

を R の分割とする．分割 Δ の幅 $|\Delta|$ を $\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ と定める．

2° 過剰和 \bar{S}_Δ と不足和 \underline{S}_Δ を、

$$\bar{S}_\Delta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j} |s_i - s_{i-1}| |t_j - t_{j-1}|$$

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j} |s_i - s_{i-1}| |t_j - t_{j-1}|$$

とする．ただし、

$$M_{i,j} = \sup\{f(x, y); (x, y) \in C_{i,j}\}$$

$$m_{i,j} = \inf\{f(x, y); (x, y) \in C_{i,j}\}$$

とする．

3° 一変数の時と同じようにして

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \overline{S}_\Delta = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \underline{S}_\Delta$$

となるときに f は R 上積分可能といい、この極限の値を

$$\int_R f(x, y) \, dx dy$$

とかく。

4° f が R で連続ならば積分可能となる。

5.2 一般の集合上の重積分

E を \mathbb{R}^2 の有界な部分集合とする。 $f = f(x, y)$ が E 上で定義された関数の時、 $E \subset R$ となる長方形 R に対して f を R 上に拡張した関数 \tilde{f} を

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases}$$

とおく。このとき、 \tilde{f} の R 上の積分により f の E 上の積分とする。つまり、

$$\int_E f(x, y) \, dx dy = \int_R \tilde{f}(x, y) \, dx dy$$

あきらかに、この値は長方形 $R \supset E$ の取り方によらない。(ただ、どのような E の上で連続関数が積分可能になるかはうるさく言い出すと難しい。ここでは簡単な集合上の積分を念頭におく) 特に、 1_E で E 上 1 の値を取り、 E^c 上で 0 を取る関数を考えると、

$$\int_E 1_E(x, y) \, dx dy$$

は E の面積を表す。上の注意からこれは

$$\int 1_E(x, y) \, dx dy$$

と書いて構わない。 1_E が積分可能なとき、 E は面積確定という。

5.3 累次積分

長方形 $[a, b] \times [c, d]$ 上の関数 $f(x, y)$ の積分はまずどちらかをとめて片方の変数について積分し、その結果を残りの変数について積分する。これを累次積分という。

例 5.1 $\int_{[a,b] \times [c,d]} xy \, dx dy$ は次のように計算する。

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} xy \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d xy \, dy \right) dx = \int_a^b x \frac{d^2 - c^2}{2} dx = \frac{(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)}{4}$$

y から先に積分したが、 x から先に積分しても結果は変わらない。このことは後で詳しく調べる事にする。

縦線形の領域上の積分平面の部分集合 D が次のように表されている時、縦線形の領域という。

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

ただし、 $\varphi(x), \psi(x)$ は連続で、 $\varphi(x) \leq \psi(x)$ が $a \leq x \leq b$ で成り立っているものとする。(x と y の役割が入れ替わっていても良い)

このとき、 $f(x, y)$ が D で積分可能ならば

$$\int_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right] dx$$

と逐次積分をすれば良い。これも後で詳しく述べる。

例 5.2 $f(x, y) = x^2 y^2$ を円板 $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上で積分する。

$$D = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

と書けるので、

$$\begin{aligned}
 \int_D x^2 y^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y^2 dy \right] dx \\
 &= \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\
 &= \int_{-1}^1 2x^2 \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} dx \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t dt \\
 &= \frac{4}{3} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^6 t dt \right)
 \end{aligned}$$

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} t dt = \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \frac{\pi}{2} \text{ なので、求める積分の値は}$$

$$\frac{4}{3} \left(\frac{3}{2^3} - \frac{5 \cdot 3}{2^3 3!} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{24}$$

となる。

注意 5.1 上の例で x または y の指数が奇数ならば対称性に気をつけると定積分の値は 0 である事が分かる。

練習 5.1 次の累次積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy \right) dx \quad (2) \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2-x} \sin(x+y) dy \right) dx$$