3.8 曲線の長さ

平面上の曲線は二つの実数値関数の組 $(x(t), y(t))$ を区間 $[\alpha, \beta]$ で考える事で表現できる（時間が経つ毎に点 $(x(t), y(t))$ が動いて行くイメージ）

この曲線の長さは次のようにして求める。

1. 区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 $\Delta : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ をとる。$P_k = (x(t_k), y(t_k))$ とかく。

2. 折れ線 $P_0 \mapsto P_1 \mapsto \ldots \mapsto P_n$ の長さ L_Δ を考えると、

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

となる。

3. 分割 Δ に関してこの L_Δ の上限が有限なとき，つまり

$$L = \sup_{\Delta} L_\Delta < \infty$$

となるとき，この L を $\{(x(t), y(t)); \alpha \leq t \leq \beta\}$ の長さと呼ぶ。

定理 3.12 $x(t), y(t)$ がともに C^1 級[1]の時、曲線 $\{(x(t), y(t)); \alpha \leq t \leq \beta\}$ の長さは

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\frac{dx}{dt}(t))^2 + (\frac{dy}{dt}(t))^2}\, dt$$

で与えられる。

証明　Δ_n を $L_{\Delta_n} \to L$ となるように選び，$[\alpha, \beta]$ の n 等分点を Δ に付け加えたものを Δ'_n とかくと，三角不等式から

$$L_{\Delta_n} \leq L_{\Delta'_n} \leq L$$

なので，最初から $|\Delta_n| \to 0$ としておいてよい.

仮定から $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ は連続なので、閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上で一様連続である。つまり、任意に $\varepsilon > 0$ を与えた時、$\delta > 0$ を十分小さく選ぶと、$[\alpha, \beta]$ の勝手な 2 点 s, t が $|s - t| < \delta$ を満たせば常に

$$\left|\frac{dx}{dt}(t) - \frac{dx}{dt}(s)\right| < \varepsilon, \text{ かつ } \left|\frac{dy}{dt}(t) - \frac{dy}{dt}(s)\right| < \varepsilon$$

[1]導関数があり、その導関数が連続である事を言う。

とできる。$|\Delta_n| < \delta$ となる十分大きな n については，$t_{k-1} \leq t \leq t_k$ ならば

$$\left|\frac{dx}{dt}(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t)\right| < \varepsilon, \text{ かつ } \left|\frac{dy}{dt}(t_{k-1}) - \frac{dy}{dt}(t)\right| < \varepsilon$$

となっている。したがって

$$\left|x(t_k) - x(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})\right| < \varepsilon|t_k - t_{k-1}|.$$

同じように

$$\left|y(t_k) - y(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})\right| < \varepsilon|t_k - t_{k-1}|$$

となる.

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dx}{dt}(t)\,dt$$

だから，三角不等式により

$$\left|\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} - \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t_{k-1})\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t_{k-1})\right)^2}|t_k - t_{k-1}|\right|$$
$$\leq \sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t_k)|t_k - t_{k-1}|\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k-1}) - \frac{dy}{dt}(t_k)|t_k - t_{k-1}|\right)^2}$$
$$\leq \sqrt{2}\varepsilon|t_k - t_{k-1}|$$

となる。これを Δ_n の分点すべて（K_n 個とする）について加えると、

$$\left|L_n - \sum_{k=1}^{K_n} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t_{k-1})\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t_{k-1})\right)^2}|t_k - t_{k-1}|\right| < |\beta - \alpha|\varepsilon$$

を得る。$n \to \infty$ として、

$$L_n \to \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}\,dt$$

がわかる。 □

系 3.13 定理 3.12 と同じ設定で，曲線が別の C^1 級のパラメータづけ $(\hat{x}(s), \hat{y}(s))$, $c \leq s \leq d$ を持つとき，s が t の単調増加な C^1 級関数ならば

$$L = \int_c^d \sqrt{\left(\frac{d}{ds}\hat{x}(s)\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\hat{y}(s)\right)^2} ds$$

が成り立つ．つまり曲線の長さはパラメータの選び方によらない．

証明 $s = s(t)$ と表す．この関数が C^1 級で常に $s'(t) > 0$ のときを考える．このとき，

$$x(t) = \hat{x}(s(t)), y(t) = \hat{y}(s(t))$$

だから，

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{ds}\hat{x}(s)\Big|_{s=s(t)} s'(t)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{ds}\hat{y}(s)\Big|_{s=s(t)} s'(t)$$

となり，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{ds}\hat{x}(s)\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\hat{y}(s)\right)^2}\Bigg|_{s=s(t)} s'(t) dt \\
&= \int_{s(a)}^{s(b)} \sqrt{\left(\frac{d}{ds}\hat{x}(s)\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\hat{y}(s)\right)^2} ds
\end{aligned}$$

がわかる．

例 3.13 極座標表示での曲線 $r = \theta$, $(0 \leq \theta \leq 1)$ の長さを求める。

$$x(\theta) = r\cos\theta = \theta\cos\theta, \quad y(\theta) = r\sin\theta = \theta\sin\theta$$

だから、求める長さ L は

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{(\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{1+\theta^2} + \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})}{2}
\end{aligned}$$

と分かる。

練習 3.12 次の曲線の指定された区間での長さを求めよ。

(1) $y = x^{3/2}, \quad (0 \leq x \leq 5)$
ヒント： $x(t) = t, y(t) = t^{3/2}$ とかくと、公式が使える。

(2) $x(t) = 3t^2 + 2,\ y(t) = 2t^3 - \frac{1}{2}, \quad (1 \leq t \leq 4)$