3.7　積分の理論

閉区間 $[a,b]$ 上で定義された関数[1] $f(x)$ の定積分を考える．

分割, 分点　閉区間 $[a,b]$ を有限個の分点 $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ によって区切る．これを**分割**

$$\Delta=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$$

を与えると言う．$\{t_j\}_{j=0}^{n}$ を分割 Δ の**分点**と呼ぶ.

$$|\Delta|=\max_{1\le j\le n}|t_j-t_{j-1}|$$

を分割 Δ の**幅**という.

不足和，過剰和　分割 $\Delta=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ が与えられたとき，関数 $f(x)$ に対して

$$\bar{S}(f;\Delta)=\sum_{j=1}^{n}M_j|t_j-t_{j-1}| \qquad \text{(過剰和という)}$$

$$\underline{S}(f;\Delta)=\sum_{j=1}^{n}m_j|t_j-t_{j-1}| \qquad \text{(不足和という)}$$

とおく．ただし，$j=1,2,\ldots,n$ に対して

$$M_j=\sup\{f(x)\,;\,t_{j-1}\le x\le t_j\},\quad m_j=\inf\{f(x)\,;\,t_{j-1}\le x\le t_j\}$$

とする．明らかに $\bar{S}(f;\Delta)\ge\underline{S}(f;\Delta)$ となっている．

細分　Δ_1,Δ_2 を区間 $[a,b]$ の分割とし，それぞれの分点を $\{t_j\}_{j=0}^{n}$, $\{s_k\}_{k=0}^{m}$ と書くことにする．このとき，Δ_1 は Δ_2 の **細分**であるとは，Δ_1 の分点はすべての Δ_2 の分点を含む，つまり

$$\{t_j\}_{j=0}^{n}\supset\{s_k\}_{k=0}^{m}$$

となるときに言う．このとき $\Delta_1\rhd\Delta_2$ と書くことにしよう[2].

定義から $\Delta_1\rhd\Delta_2$ のとき

$$\bar{S}(f;\Delta_1)\le\bar{S}(f;\Delta_2)$$
$$\underline{S}(f;\Delta_1)\ge\underline{S}(f;\Delta_2)$$

が成り立つことに注意する.

[1]こう書くと分かった気になるが，これではあまりにも対象が広すぎて困ることになる．例えば有理数で 0 無理数で 1 の値をとる関数などもある．

[2]細分の記号として国際標準は決まっていないようだ．教科書によっては $\Delta_1\succeq\Delta_2$ と書いているのもある．記号を使わない事も多い．

定理 3.11 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \bar{S}(f;\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}(f;\Delta) \tag{4}$$

が成り立つ.

定義 3.3 *(4)* が成り立つとき f は $[a,b]$ 上 *Riemann* の意味で**積分可能**と言い，この極限を $\int_a^b f(x)dx$ と書く.

定理 3.11 の証明

1) 細分列にそった極限の存在

最初に $[a,b]$ の分割の細分列 $\{\Delta_n\}$ をとる．つまり $n < m$ ならば $\Delta_m \triangleright \Delta_n$ となるものとする．さらに定理の仮定のように

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$$

としておく．この時，上に注意したように

$$\underline{S}(f;\Delta_1) \leq \ldots \leq \underline{S}(f;\Delta_n) \leq \bar{S}(f;\Delta_n) \leq \ldots \leq \bar{S}(f;\Delta_1)$$

となり，$\{\bar{S}(f;\Delta_n)\}$ は下に有界な単調減少列で，$\underline{S}(f;\Delta_n)$ は上に有界な単調増大列であり，どちらも $n \to \infty$ のとき極限をもつ．それぞれの極限を $\bar{S}(f)$ と $\underline{S}(f)$ と書く．途中の不等式から $\underline{S}(f;\Delta_n) \leq \bar{S}(f;\Delta_n)$ だから，$n \to \infty$ として $\underline{S}(f) \leq \bar{S}(f)$ が分かる.

一方で，$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ 上で連続なので，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で**一様連続**[3]になることが知られている．つまり

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が決まって，$x, y \in [a,b]$ が $|x-y| < \delta$ を満たすほど近ければ $[a,b]$ 内のどこにあっても

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

このことを使うと，$\varepsilon > 0$ を任意に小さく与えたとき，δ を一様連続性から選んでおく．細分列 $\{\Delta_n\}$ で n を大きくとれば $|\Delta_n| < \delta$ とできる．このような分割 Δ_n について考える.

[3] $f(x) = \frac{1}{x}$ は $(0,1]$ では一様連続ではないが，$[c,1]$ $(0 < c < 1)$ 上では一様連続になる.

分割 Δ_n の分点を $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ と書こう[4].

分割 Δ_n の各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ 上では $f(x)$ は連続なので最大値と最小値をとる点 c_j, d_j が $t_{j-1} \leq c_j, d_j \leq t_j$ を満たすようにとれて

$$f(c_j) \leq f(x) \leq f(d_j) \qquad t_{j-1} \leq \forall x \leq t_j$$

となる．つまり，このとき $M_j = f(d_j), m_j = f(c_j)$ となる．

$$|c_j - d_j| \leq t_j - t_{j-1} \leq |\Delta_n| < \delta$$

となるが，一様連続性からこのとき

$$0 \leq M_j - m_j = f(d_j) - f(c_j) < \varepsilon$$

となっている．これは任意の $1 \leq j \leq m$ で正しい．

このことから $|\Delta_n| < \delta$ ならば

$$0 \leq \bar{S}(f;\Delta_n) - \underline{S}(f;\Delta_n) = \sum_{j=1}^{m}(M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) < \varepsilon \sum_j (t_j - t_{j-1}) = (b-a)\varepsilon.$$

この式で $n \to \infty$ として

$$0 \leq \bar{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \varepsilon(b-a)$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成り立つ．$\varepsilon \to 0$ として $\bar{S}(f) = \underline{S}(f)$ が成り立つ．この値を単に S と書いておく．

2) 分割の幅が小さければ過剰和も不足和も S に近いこと

最後に，(4)　を示すには，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_0 > 0$ がとれて $[a, b]$ の分割 Δ が $|\Delta| < \delta_0$ を満たすならば

$$|\underline{S}(f;\Delta) - S| < \varepsilon, \quad |\bar{S}(f;\Delta) - S| < \varepsilon$$

が成り立つことを言えばよい[5].

まず，細分列 $\{\Delta_n\}$ の元で n を十分大きくとり，

$$|\underline{S}(f;\Delta_n) - S| + |\bar{S}(f;\Delta_n) - S| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

[4]ほんとはそれぞれの分点は n に関係して変わるので $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_{m(n)}^{(n)}$ と表すべきだが，記号が複雑になるので上のように n は省略しておく．

[5]S が最初にとった細分列 $\{\Delta_n\}$ に関係して決まっている事に注意．上の式はこれが細分列のとり方によらないことを言っている．

となるようにしておくことができる．Δ_n の分点を $\{t_j\}_{j=1}^m$ と書こう．$\delta_0 > 0$ を十分小さくとり，

$$x, y \in [a,b], |x-y| < \delta_0 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{6}$$

となるようにしておく．これは f の一様連続性から可能．

いま，$|\Delta| < \delta_0$ とする．この時，Δ の分点を $\{s_i\}_{i=0}^N$ と書くとき，上と同じ議論で (6) より

$$0 \leq \bar{S}(f;\Delta) - \underline{\mathrm{S}}(f;\Delta) = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i)(s_i - s_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^N (s_i - s_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

が分かる．

次に，Δ と Δ_n の分点を合わせてできる分割を Δ^* と書こう．Δ^* は Δ, Δ_n の細分になっているから (approximation1) より

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\mathrm{S}}(f;\Delta_n) \leq \underline{\mathrm{S}}(f;\Delta^*) \leq \bar{S}(f;\Delta^*) \leq \bar{S}(f;\Delta_n) < S + \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

となる．また Δ の任意の小区間 $[s_{i-1}, s_i]$ をみるとき，この中に Δ^* の分点が $s_{i-1} = u_0^i < u_1^i < \ldots < u_{k(i)}^i = s_i$ と入っているとすると，この区間内での $\underline{\mathrm{S}}(f;\Delta^*)$ と $\underline{\mathrm{S}}(f;\Delta)$ に対応する差は

$$\sum_{\ell=1}^{k(i)} \left[\min_{x \in [u_{\ell-1}^i, u_\ell^i]} f(x) \right] (u_\ell^i - u_{\ell-1}^i) - m_i(s_i - s_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon(s_i - s_{i-1})}{2(b-a)}$$

と評価できる．したがってこれを i について加えると

$$0 \leq \underline{\mathrm{S}}(f;\Delta^*) - \underline{\mathrm{S}}(f;\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

(7), (8) を合わせると，

$$\underline{\mathrm{S}}(f;\Delta) > \underline{\mathrm{S}}(f;\Delta^*) - \frac{\varepsilon}{2} > S - \varepsilon$$

同じ議論で $\bar{S}(f;\Delta)$ についても

$$\bar{S}(f;\Delta) < \bar{S}(f;\Delta^*) + \frac{\varepsilon}{2} < S + \varepsilon$$

したがって S をひくと

$$-\varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f;\Delta) - S \leq \bar{S}(f;\Delta) - S < \varepsilon$$

が出てくる． □