3.4 部分積分

定理 3.11 （部分積分法）f, g が連続な導関数をもつとき

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{3}$$

証明は積の微分公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を積分すればよい.

例 3.3 （教科書 例 3.6）

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

ただし，$x > 0$ とする.

$$\int_1^e \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e dx = 1$$

例 3.4 （教科書 例 3.7）

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+a}dx &= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx \\
&= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}dx \\
&= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}dx + a\log|x+\sqrt{x^2+a}| + C
\end{aligned}$$

よって移項すると

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\log|x+\sqrt{x^2+a}|\right] + C$$

例 3.5 （教科書 例 3.9）

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin bx dx &= \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx \\
&= \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx
\end{aligned}$$

右辺最後の項を移項すると，不定積分であることに注意して

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2} + C$$

よって

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$$

と書くことができる．

例 3.6 $\displaystyle\int \mathrm{Arctan} x\, dx$ を計算する．

$$\int \mathrm{Arctan} x\, dx = x\mathrm{Arctan}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

と部分積分した後，$t = 1+x^2$ とおくと，$dt = 2xdx$ だから，

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t| + C = \frac{1}{2}\log|1+x^2| + C$$

となり，

$$\int \mathrm{Arctan} x\, dx = x\mathrm{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + C$$

を得る．これは $\log x$ の不定積分を求めるのに似ている．

例 3.7 （教科書 例 3.10）$a \neq 0, n = 1, 2, \ldots$ のとき

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

を計算する．すでに $n = 1$ の時は

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + C$$

を知っている． $n \geq 2$ の時を求めるために I_n の満たす漸化式を求める．
$n \geq 1$ として，部分積分をすると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

整理して $n+1$ を n と書き直すと $n \geq 2$ のとき

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$$

という漸化式が成り立つ．これを解くと $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_n =& \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2\ell+1)}{(2n-2)(2n-4)\cdots(2n-2\ell)} \frac{x}{a^{2\ell}(x^2+a^2)^{n-\ell}} \\ &+ \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2a^2)^{n-1}(n-1)!} \times \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}. \end{aligned}$$

ただし，$(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2\ell+1)$ など，上の式の分母分子に現れる積は

「左端の値（上の例では $(2n-3)$）から 2 ずつ引いた値をかけて最後が右端の値（上の例では $(2n-2\ell+1)$）で終わる」

という意味．ただし，左端より右端の値が大きければこの積は 1（何もかけない）と約束する．従って $n = 2$ のときは $\ell = 1$ の項が残り，$2n-3 = 1 < 2n-2\ell+1 = 3$ なので，分子のこの積は 1 になる.（分母のこの積は $2n-2 = 2$ になる）

練習 3.6 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$　(2) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx$　(3) $\displaystyle\int x\mathrm{Arctan}x\,dx$　(4) $\displaystyle\int x\cos^2 x\sin x\,dx$

練習 3.7 (1) 定積分

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$$

を計算せよ.

(2) $n \geq 2$ に対して，定積分

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

の満たす漸化式を求めよ.