3.2 基本的な不定積分

初等関数の不定積分

$f(x)$	$\int f(x)dx$	備考
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \in \mathbf{R}, a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log\lvert f(x)\rvert$	
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sec^2 x$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\frac{x}{a}$	$a > 0$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}$	$a > 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\log\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert$	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2+a}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\log\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert\right)$	
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\mathrm{Arcsin}\frac{x}{a}\right)$	$a > 0$
$e^{ax}\sin bx$	$\frac{e^a x}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$	$a^2+b^2 > 0$
$e^{ax}\cos bx$	$\frac{e^a x}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$	$a^2+b^2 > 0$

中央の関数を微分すると左側の関数が得られる.

3.3 置換積分と部分積分

定理 3.9 （置換積分）$\varphi(t)$ が連続な導関数を持つならば $\varphi(t)$ の値域上で連続な関数 $f(x)$ について

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

さらにこのとき t が $a \to b$ と変化するのに対応して $x = \varphi(t)$ が $\alpha \to \beta$ と変化しているならば、

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

証明 $F(x) = \int f(x)dx$ つまり、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

という式がでる。したがって、

$$F(\beta) - F(\alpha) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

として後半が出る。前半はこれを不定積分で書いたと思えば良い。 □

注意 3.1 $x = \varphi(t)$ のとき，上の式は

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt$$

と形式的に書き換えて、x に関する積分範囲を対応する t の範囲に置き換えればいいことを示している．形式的だが便利な理解の仕方である．

例 3.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ を計算する。（教科書 例 3.20 参考）$x = a\sin t$ と置換すると $dx = a\cos t dt$ で

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\cos t dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t}} = \int dt = t + C$$

$x = a\sin t$ とおいたから $t = \mathrm{Arcsin}(x/a)$ なので、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{Arcsin}(x/a) + C$$

また $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ の計算も、（教科書 例 3.2） $x = a\tan t$ とおくと、$dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt$ だから、

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a}{a^2\cos^2 t(1+\tan^2 t)}dt = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + C$$

練習 3.3 （教科書 p.91 問 3.8） 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $x\sqrt{1+x^2}$ (2) $\dfrac{\log x}{x}$ (3) xe^{x^2} (4) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

ヒント：(4) は $t = \sqrt{x}$ とおいてみる。

練習 3.4 （教科書 p.91 問 3.9） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

定理 3.10 （偶関数・奇関数の定積分）

(1) $f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2) $f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

証明 $y = -x$ と変数変換すると f が偶関数の時

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-y)dy = \int_0^a f(y)dy$$

f が奇関数ならば

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-y)dy = -\int_0^a f(y)dy$$

となるので求める式が定積分の加法性から得られる。 □

例 3.2 （教科書 p.102 例 3.18）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log|x+\sqrt{x^2+a}| + C$$

の計算をしよう。置換の仕方が特殊である（高校ではやらない計算）。

$\sqrt{x^2+a} = t - x$ （または $x + \sqrt{x^2+a} = t$）とおく。両辺を 2 乗して

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2$$

これを x について解くと

$$x = \frac{t^2 - a}{2t} \qquad \therefore dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2t^2}\right) dt = \frac{t^2+a}{2t^2} dt.$$

また、

$$\sqrt{x^2+a} = t - x = \frac{t^2+a}{2t}$$

となり、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{t^2+a}{2t^2} \frac{2t}{t^2+a} dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

練習 3.5 次の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$