5.6.2 円柱座標

空間で極座標を考える前に、平面の極座標と空間の極座標の中間の円筒座標を紹介する．これは $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$ と変数を取り替える変換で、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と表す． z はそのままにしておく．場合によっては空間の極座標を使うよりもよい場合がある．ヤコビアンは，平面の極座標と同じ r になる．

例 5.7 $a > 0$ とする．円柱 $x^2 + y^2 \le ax$ によって切り取られる球 $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ の体積を求める[1]．円筒座標を使う． x, y 平面の円周 $x^2 + y^2 = ax$ は中心が $(0, \frac{a}{2})$ で，半径が $\frac{a}{2}$ の円で、その内部は

$$r^2 - ar\cos\theta \le 0 \qquad \therefore r \le a\cos\theta$$

で与えられる．これから $r \ge 0$ だから $\cos\theta \ge 0$ でなくてはならず，

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

となる．考えている球は円筒座標では

$$r^2 + z^2 \le a^2 \qquad \therefore -\sqrt{a^2 - r^2} \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}$$

とかけるから，求める体積は次のように計算できることになる．

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\{\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\, r \le a\cos\theta,\, -\sqrt{a^2-r^2} \le z \le \sqrt{a^2-r^2}\}} r dr d\theta dz \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} \left(\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz \right) r dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} 2\sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta
\end{aligned}$$

$\cos\theta$ は偶関数なので，右辺は

$$4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta$$

に等しい．

---

[1] 後述するが $D \subset \mathbb{R}^2$ の面積は，$\int_D dxdy$ で与えられる．$V \subset \mathbb{R}^3$ の体積も同様に $\int_V dxdydz$ で求まる．

ここで，$v=\sqrt{a^2-r^2}$ とおくと $vdv=-rdr$ で，v の積分範囲は

$$a\sin\theta \le v \le a$$

にかわる．($0\le\theta\le\pi/2$ だから $\sin\theta\ge 0$) したがって，

$$\begin{aligned}
&4\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,rdrd\theta \\
&=4\int_0^{\pi/2}\int_{a\sin\theta}^{a} v^2 dvd\theta \\
&=4\int_0^{\pi/2}\frac{a^3}{3}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta \\
&=\frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

を得る．

5.6.3 空間の極座標

空間の極座標は $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を使うので，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ と書くことにして、$z=r\cos\phi, \rho=r\sin\phi$ とおく． z 軸に関する回転移動は x,y で表せることから，ϕ の範囲は $0\le\phi\le\pi$ でよいことがわかる．x,y は

$$x=\rho\cos\theta=r\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta=r\sin\phi\sin\theta$$

と表すと，$0\le\theta<2\pi$ となり，r は非負の値をとる．ヤコビアンを計算しよう．

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} \\
&= -\cos\phi \begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} - r\sin\phi \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi \end{vmatrix} \\
&= -r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\sin\phi\cos^2\phi - r^2\sin^3\phi(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\
&= -r^2\sin\phi
\end{aligned}$$

変数変換にはヤコビアンの絶対値がかかるから，極座標に変換する時は積分に $r^2\sin\phi$ がかかる事になる．

例 5.8 楕円体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1$ の体積を求めよう．$a,b,c>0$ としておく．
変数変換は 3 次元の極座標を用いて，

$$x = ar\cos\theta\sin\phi,\ y = br\sin\theta\sin\phi, z = cr\cos\phi$$

となる．上の楕円体の式をこの変換で書き換えると，

$$r^2 \leq 1$$

となる．ヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\phi & -ar\sin\theta\sin\phi & ar\cos\theta\cos\phi \\ b\sin\theta\sin\phi & br\cos\theta\sin\phi & br\sin\theta\cos\phi \\ c\cos\phi & 0 & -cr\sin\phi \end{vmatrix}$$
$$= -abcr^2\sin\phi$$

なので，この絶対値を $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ で積分して，

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 abc\sin\phi drd\theta d\phi = \frac{1}{3}\cdot 2\pi \cdot 2abc = \frac{4\pi}{3}abc$$

練習 5.4 次の重積分を計算せよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\le 1,\, 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\}} x^2 z\, dxdydz$

(2) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2+z^2\le a^2\}} \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$