5.6 変数の変換

定理 5.2 (教科書 p.201 定理 5.16 の簡単な場合) O を $\mathbb{R}^2$ の開集合で，$D \subset O$ は有界な閉集合とする．写像 $\Phi : O \ni (u,v) \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$ はC^1-級で，さらに D 上で Φ のヤコビアン (Jacobian)

$$J\Phi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

が 0 にならないものとする．$G = \Phi(D)$ とかく時 f が G 上で積分可能ならば，**変数変換の公式**

$$\int_G f(x,y)dxdy = \int_D f(\Phi(u,v))|J\Phi(u,v)|dudv$$

が成り立つ．

証明　D 内の微小な長方形 $[u_0, u_0 + \Delta u,] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ が

$$\Phi : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$$

によってどのように写るかを見よう．$x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$ とかく．$|s| \leq |\Delta u|, |t| \leq |\Delta v|$ のとき $x(u,v)$ が C^1-球なので，

$$x(u_0 + t, v_0 + s) = x_0 + sx_u(u_0, v_0) + tx_v(u_0, v_0) + \varepsilon_1$$

ただし，$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(u_0, v_0, s, t) = o(|\Delta u| + |\Delta v|)$ が $\Delta u, \Delta v \to 0$ で成り立つ．これは

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \frac{\varepsilon_1}{|\Delta u| + |\Delta v|} = 0$$

という意味である．
　同様に

$$y(u_0 + s, v_0 + t) = y_0 + sy_u(x_0, y_0) + ty_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_2$$

ただし，$\varepsilon_2 = o(|\Delta u| + |\Delta v|)$. 図を書いてみると，この微小長方形 $[u_0, u_0 + \Delta u,] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ が (x_0, y_0) を始点とする二つのベクトル

$$(x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0))\Delta u + (x_0, y_0) \quad と \quad (x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0))\Delta v + (x_0, y_0)$$

によって作られる平行四辺形から $o(|\Delta u| + |\Delta v|)$ しか離れていないところに写される．この平行四辺形の面積が $|J\Phi(x_0, y_0)|\Delta u \Delta v$ であることに

注意する．従って写ったあとの面積はこの平行四辺形の面積とほぼ同じ．従って D を微小長方形に分割して加えることにより

$$\sum f(x_i, y_j)|\Phi(\Delta_{i,j})| = \sum f(\Phi(u_i, v_j))\,|J\Phi(u_j, v_j)|\,|\Delta_{i,j}|$$

これで分割を細かくすれば求める式を得る． $\square$

次元が上がった場合も同じ定理が成り立つが，このとき，$(u_1, \ldots, u_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$ が $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に 1 対 1 で写るとき，ヤコビアンは

$$J(u_1, \ldots u_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

となる．

例 5.5 $\int_{\{0 \le x+y \le 1, |x-y| \le 1\}} (x+y)e^{x-y}dxdy$ を計算する．$u = (x+y)/2, v = (x-y)/2$ とおくと、$x = u+v, y = u-v$ となり，$E = \{0 \le u \le \frac{1}{2}, |v| \le \frac{1}{2}\}$ は $D = \{0 \le x+y \le 1, |x-y| \le 1\}$ と 1 対 1 に対応している．ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

なので，

$$\int_{0 \le x+y \le 1, |x-y| \le 1} (x+y)e^{x-y}dxdy = \int_{\{0 \le u \le \frac{1}{2}, |v| \le \frac{1}{2}\}} 2ue^{2v}|-2|dudv = \frac{e^1 - e^{-1}}{4}$$

注意 5.3 教科書にあるように，定理 5.2 は少し広げることができる．簡単に言うと，ヤコビアンが 0 になる集合の" 面積" がゼロならばこの定理の結果はそのまま成り立つ．

上の注意は，曲座標変換という重要な変換がヤコビアンが 0 になる所を含むことによる．

5.6.1 平面の極座標

平面の極座標については、点 (x, y) と原点の距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，および位置ベクトル (x, y) が x 軸の正の方向となす角 θ を用いて表す．円盤上の積分を実行するときなどに便利な変換である．これにより x, y は

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

となる，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となる．$r=0$ のとき，θ の値によらず $x=y=0$ となってしまい，対応は 1 対 1 ではないが，このような (r,θ) の集合の面積は 0 なので，変数変換の公式が使える．

例 5.6 $e^{-x^2-y^2}$ を第 1 象限で積分する．あとで話をするが，この場合は広義重積分が存在して形式的に計算してよい事が知られている．

$$\begin{aligned} \int_{\{x\geq 0,\, y\geq 0\}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ところで，左辺は

$$\int_{\{x\geq 0,\, y\geq 0\}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

と変形できるから，これから有名な定積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \therefore \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

を得る．パラメータつきで考えると便利で，$a>0$ のとき，

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-y^2}\,\frac{dy}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

がわかる．

練習 5.3　次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\leq a^2\}} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0\}} (x^2-y^2)dxdy$

練習 5.4 (自習用)

ガンマ関数とベータ関数についての良く知られた式を証明しよう.

$a>0, b>0$ のとき

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx \int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}\,dy = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

を 2 重積分と見る事ができる.

(1)　ここで，次のように変数を変換する．$u=x, v=x+y$ このとき，変換のヤコビアンと u,v の動く範囲を求め，上の積分を u,v の積分で表せ。

(2)　さらに変数を $w=\frac{u}{v}$, $z=v$ と変換して、変換のヤコビアンと w,z の動く範囲を求め，

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

が成り立つ事を確かめよ．ただし，$B(a,b)$ はベータ関数で

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

とする．これらの積分は広義積分であるが，普通に計算して良い。