数理統計学まとめ（その 13）：第 6 章 検定

4　分散の検定

　正規母集団の分散が特定の値であるかどうかの検定.
　帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
　対立仮説 $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
として，有意水準 α で検定をする.
　母集団からの大きさ n の無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ がある時に帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ の下では

$$X^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2$$

は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従うので，上側 $1 - \frac{\alpha}{2}$ 点 $\chi_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ を使って

$$P\left(X^2 < \chi_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\right) = 1 - P\left(X^2 > \chi_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\right) = 1 - (1 - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$$

と上側 $\frac{\alpha}{2}$ 点 $\chi_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$ を使って

$$P\left(X^2 > \chi_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right) = \frac{\alpha}{2}$$

となるので，両側検定の棄却域は

$$R = \left\{0 \leq x^2 < \infty\, ;\, x^2 < \chi_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \quad \text{または} \quad \chi_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) < x^2\right\}$$

となる.

例 4.1 (教科書 p.131, 例題 6.7)
　ある機器の部品の製造会社で，過去の製品のばらつきは分散 $= 0.010$ であると言われている．いま，製造方法を変え，ランダムにデータを取ったところ

$$6.28,\ 6.33,\ 6.52,\ 6.44,\ 6.31,\ 6.44,\ 6.40,\ 6.49,\ 6.68,\ 6.34$$

が得られた．製造方法を変えた事により，ばらつきに変化が生じたと言えるか？

解　まず新しい製造方法のデータの平均と $X^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ を求める．データは 10 個あるので，$n = 10$ である．有意水準を 5 %として，

$$\frac{1}{10}\bigl(6.28+6.33+6.52+6.44+6.31+6.44+6.40+6.49+6.68+6.34\bigr) = 6.423$$

だから, これより偏差平方和 $SS = nS^2$ は（途中小数点以下 5 桁目を切り捨てて計算して）

$$6.28^2+6.33^2+6.52^2+6.44^2+6.31^2+6.44^2+6.40^2+6.49^2+6.68^2+6.34^2 \\ -10\times 6.423^2 = 0.130$$

となる．これより $\sigma_0^2 = 0.010$ を代入して

$$x^2 = \frac{0.130}{0.010} = 13.000$$

を得る $\chi_9(0.975) = 2.700, \chi_9(0.025) = 19.023$ だから $x^2 = 13.0$ は棄却域には入らないので帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 0.010$ は採択される．よってばらつきは変わったとは言えない．

5　分散比の検定（等分散の検定）

二つの母集団の分散を比較する検定を行う．二つの母集団を A, B として，母分散 σ_A^2, σ_B^2 について
帰無仮説 $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$
対立仮説 $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$
として，有意水準 α で両側検定をする．今，二つの母集団から無作為標本をそれぞれ n_A 個と n_B 個取り出し，

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n_A}, \quad \text{と} \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_B}$$

となったとき，帰無仮説 $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ の下では，共通の母分散を σ^2 と書くとき

$$X_A^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_A}(X_j - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2}SS_A$$

$$X_B^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n_B}(Y_k - \bar{Y})^2 = \frac{1}{\sigma^2}SS_B$$

がそれぞれ自由度 n_A-1, n_B-1 のカイ 2 乗分布にしたがい，この二つは独立なので，比

$$F = \frac{\frac{X_A^2}{n_A-1}}{\frac{X_B^2}{n_B-1}} = \frac{(n_B-1)SS_A}{(n_A-1)SS_B}$$

は自由度 (n_A-1, n_B-1) の F-分布になる．有意水準を α と書くとき，棄却域は

$$R = \left\{F < F_{n_B-1}^{n_A-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \ \text{ または } \ F > F_{n_B-1}^{n_A-1}(\frac{\alpha}{2})\right\}$$

となる．F-分布表には下側の値はないので，通常

$$F_{n_B-1}^{n_A-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{F_{n_A-1}^{n_B-1}(\frac{\alpha}{2})}$$

であることを使って求めることになるが，データから A と B を F 値が 1 より大きいように取り直せば，下側の境界値は見る必要がなくなる．

例 5.1 (教科書 p.133 例題 6.8)
ある動物を 2 群に分けて 2 種類のエサ A, B を与えて成長の差を調べ，下の体重のデータを得た．両エサのばらつきは同じと言えるか?

	平均	分散	サンプル数
A	168.1	8.8	10
B	164.3	10.1	8

解　帰無仮説 $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ とし，対立仮説を $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ とする．$n_A = 10, n_B = 8$ である．有意水準は 10 %で考えている．

二つの群れの偏差平方和は

$$SS_A = 10 \times 8.8 = 88, \quad SS_B = 8 \times 10.1 = 80.8$$

なので，F-値 を 1 より大きくするように

$$f = \frac{80.8 \times 9}{88 \times 7} = \frac{727.2}{616} = 1.18$$

ととると，帰無仮説の下ではこれは自由度 $(7, 9)$ の F-分布の実現値となる． この分布の上側 5 % 点は

$$F_9^7(0.05) = 3.29 > 1.18 = f$$

となり，f は棄却域に入らない．したがって帰無仮説 $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ は採択されることになり，二つのエサによるばらつきの違いは認められないという結論が出る．

注意 5.1 教科書とは F-値 が逆数になっている．したがって，使う上側 5 %点の値も自由度の組み合わせが上下逆の F 分布の値を使うことになる．どちらのやり方で解いても構わない．